מתמטריק ללמוד ולהצליח

דף עבודה – תרגול נוסף · סדרות

פתרונות מלאים

חשבונית · הנדסית · הנדסית אינסופית · כלל נסיגה

סדרות
שאלון 571

הפתרון המלא של כל שאלה בדף העבודה, שלב אחרי שלב. התשובה הסופית של כל סעיף מסומנת באדום.

1 שאלה 1 בסיסי

בסדרה חשבונית $a_1 = 5$ והפרש הסדרה $d = 3$.

א. מצאו את a_{20}.

ב. מצאו את סכום 20 האיברים הראשונים.

ג. איזה איבר בסדרה שווה ל־101?

סעיף א

$$a_{20} = 5 + 19 \cdot 3 = 62$$

תשובה: $a_{20} = 62$

סעיף ב

$$S_{20} = \frac{20(5 + 62)}{2} = 670$$

תשובה: $S_{20} = 670$

סעיף ג

$$5 + (n - 1) \cdot 3 = 101$$

$$n - 1 = 32$$

$$n = 33$$

תשובה: a_{33}

2 שאלה 2 בסיסי

בסדרה הנדסית $a_1 = 3$ ומנת הסדרה $q = 2$.

א. מצאו את a_6.

ב. מצאו את סכום 6 האיברים הראשונים.

ג. איזה איבר בסדרה שווה ל־768?

סעיף א

$$a_6 = 3 \cdot 2^5 = 96$$

תשובה: $a_6 = 96$

סעיף ב

$$S_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot 63 = 189$$

תשובה: $S_6 = 189$

סעיף ג

$$3 \cdot 2^{n-1} = 768$$

$$2^{n-1} = 256 = 2^8$$

$$n = 9$$

תשובה: a_9

3 שאלה 3 בסיסי

בסדרה חשבונית $a_4 = 11$ ו־$a_{10} = 29$.

א. מצאו את d ואת a_1.

ב. הביעו את S_n באמצעות n.

ג. כמה איברים ראשונים יש לחבר כדי לקבל סכום 100?

סעיף א

$$a_{10} - a_4 = 6d = 18$$

$$d = 3$$

$$a_1 = 11 - 3 \cdot 3 = 2$$

תשובה: $d = 3$, $a_1 = 2$

סעיף ב

$$a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$$

$$S_n = \frac{n(2 + 3n - 1)}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}$$

תשובה: $S_n = \frac{n(3n+1)}{2}$

סעיף ג

$$\frac{n(3n+1)}{2} = 100$$

$$3n^2 + n - 200 = 0$$

$$n = \frac{-1 \pm 49}{6}$$

$$n = 8$$

תשובה: $n = 8$

4 שאלה 4 בינוני

סכום סדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 24, והאיבר הראשון שלה הוא 8.

א. מצאו את מנת הסדרה.

ב. מהריבועים של כל איברי הסדרה בונים סדרה חדשה. מצאו את סכומה.

ג. מצאו את סכום האיברים שנמצאים במקומות האי־זוגיים בסדרה המקורית.

סעיף א

$$\frac{8}{1-q} = 24$$

$$1 - q = \frac{1}{3}$$

$$q = \frac{2}{3}$$

תשובה: $q = \frac{2}{3}$

סעיף ב

זו סדרה הנדסית עם $b_1 = 64$ ו־$q = \frac{4}{9}$:

$$S = \frac{64}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{576}{5}$$

תשובה: $\frac{576}{5} = 115.2$

סעיף ג

$a_1 , a_3 , a_5 , \ldots$

סדרה הנדסית עם $a_1 = 8$ ומנה $q^2 = \frac{4}{9}$:

$$S = \frac{8}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{72}{5}$$

תשובה: $\frac{72}{5} = 14.4$

5 שאלה 5 בינוני

סדרה מוגדרת על ידי $a_1 = 5$ ו־$a_{n+1} = 2a_n - 3$.

א. מצאו את a_2 , a_3 , a_4.

ב. מגדירים $b_n = a_n - 3$. הוכיחו ש־b_n סדרה הנדסית.

ג. הביעו את a_n באמצעות n.

ד. חשבו את סכום 10 האיברים הראשונים בסדרה a_n.

סעיף א

$$a_2 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$$

$$a_3 = 2 \cdot 7 - 3 = 11$$

$$a_4 = 2 \cdot 11 - 3 = 19$$

תשובה: $7 , 11 , 19$

סעיף ב

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 3 = 2a_n - 6 = 2(a_n - 3) = 2b_n$$

לכן $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2$ קבוע: סדרה הנדסית עם $b_1 = 2 , q = 2$.

תשובה: **הוכחה** $(q = 2)$

סעיף ג

$$b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

$$a_n = b_n + 3 = 2^n + 3$$

תשובה: $a_n = 2^n + 3$

סעיף ד

$$S = (b_1 + \ldots + b_{10}) + 10 \cdot 3$$

$$b_1 + \ldots + b_{10} = \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2046$$

$$S = 2046 + 30 = 2076$$

תשובה: 2076

6 שאלה 6 בינוני

שלושה מספרים יוצרים סדרה חשבונית שסכומה 15. אם מוסיפים 1 למספר הראשון, 1 למספר השני ו־4 למספר השלישי, מתקבלת סדרה הנדסית.

א. מצאו את שלושת המספרים (שתי אפשרויות).

ב. עבור הסדרה החשבונית העולה, מצאו את מנת הסדרה ההנדסית שהתקבלה.

סעיף א

נסמן $a-d\ ,\ a\ ,\ a+d$:

$$3a=15 \Rightarrow a=5$$

הסדרה ההנדסית: $6-d\ ,\ 6\ ,\ 9+d$

$$6^2=(6-d)(9+d)$$

$$d^2+3d-18=0$$

$$d=3 \text{ או } d=-6$$

תשובה: $8\ ,\ 5\ ,\ 2$ **או** $11\ ,\ 5\ ,\ -1$

סעיף ב

$$3\ ,\ 6\ ,\ 12$$

$$q=\frac{6}{3}=2$$

תשובה: $q=2$

7 שאלה 7 מתקדם

בסדרה חשבונית יש 20 איברים. סכום האיברים שבמקומות האי־זוגיים הוא 120, וסכום האיברים שבמקומות הזוגיים הוא 150.

א. מצאו את הפרש הסדרה.

ב. מצאו את האיבר הראשון.

ג. מצאו את סכום כל 20 האיברים.

ד. כמה מאיברי הסדרה שליליים?

סעיף א

יש 10 זוגות $(a_1\ ,\ a_2)\ ,\ (a_3\ ,\ a_4)\ ,\ \dots$ ובכל זוג ההפרש הוא d:

$$150-120=10d$$

$$d=3$$

תשובה: $d=3$

סעיף ב

האיברים במקומות האי־זוגיים: סדרה חשבונית של 10 איברים עם הפרש $2d=6$:

$$\frac{10(2a_1+9\cdot 6)}{2}=120$$

$$2a_1+54=24$$

$$a_1=-15$$

תשובה: $a_1=-15$

סעיף ג

$$S_{20}=120+150=270$$

תשובה: 270

סעיף ד

$$-15+3(n-1)<0$$

$$n<6$$

האיברים a_1 עד a_5 שליליים ($a_6=0$).

תשובה: 5

8 שאלה 8 מתקדם

נתונה סדרה הנדסית אינסופית שבה $a_1 = x$ ו־$q = x - 1$ $(x \neq 0\ ,\ x \neq 1)$.

א. לאילו ערכים של x לסדרה יש סכום?

ב. הביעו את סכום הסדרה באמצעות x.

ג. סכום הסדרה הוא 3. מצאו את x.

ד. עבור x מסעיף ג, מצאו את סכום כל האיברים החל מהאיבר השלישי.

סעיף א

$$-1 < x - 1 < 1$$

$$0 < x < 2$$

תשובה: $x \neq 1\ ,\ 0 < x < 2$

סעיף ב

$$S = \frac{x}{1-(x-1)} = \frac{x}{2-x}$$

תשובה: $S = \frac{x}{2-x}$

סעיף ג

$$x = 3(2 - x)$$

$$4x = 6$$

$$x = 1.5$$

תשובה: $x = 1.5$

סעיף ד

$$q = 0.5\ ,\ a_3 = 1.5 \cdot 0.5^2 = 0.375$$

$$S = \frac{0.375}{1-0.5} = 0.75$$

או: $3 - a_1 - a_2 = 3 - 1.5 - 0.75 = 0.75$

תשובה: 0.75

9 שאלה 9 מתקדם

בסדרה הנדסית $a_1 = 1$ ו־$q = 3$. S_n הוא סכום n האיברים הראשונים.

א. הביעו את S_n באמצעות n.

ב. מהו המספר הקטן ביותר של איברים שסכומם גדול מ־1000?

ג. הוכיחו: $S_{n+1} = 3S_n + 1$.

סעיף א

$$S_n = \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3-1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

תשובה: $S_n = \frac{3^n - 1}{2}$

סעיף ב

$$\frac{3^n - 1}{2} > 1000$$

$$3^n > 2001$$

$$3^6 = 729\ ,\ 3^7 = 2187$$

$$n = 7$$

תשובה: $n = 7$

סעיף ג

$$3S_n + 1 = \frac{3^{n+1} - 3}{2} + 1 = \frac{3^{n+1} - 1}{2} = S_{n+1}$$

תשובה: הוכחה