פתרונות מלאים

אילוצים · שרטוט התחום האפשרי · קודקודים · פונקציית מטרה · מקסימום ומינימום

הפתרון המלא של כל שאלה בדף העבודה, שלב אחרי שלב. התשובה הסופית של כל סעיף מסומנת באדום.

1 שאלה 1 בסיסי

נתונה מערכת האילוצים:

$x \geq 0 \ , \ y \geq 0$

$x + y \leq 8$

$x + 2y \leq 12$

א. מצאו את נקודות החיתוך של הישר $x + y = 8$ עם הצירים.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הישר $x + 2y = 12$ עם הצירים.

ג. סרטטו את התחום האפשרי ומצאו את קודקודיו.

סעיף א

נציב $x = 0$:

$$0 + y = 8 \Longrightarrow y = 8$$

נציב $y = 0$:

$$x + 0 = 8 \Longrightarrow x = 8$$

תשובה: $(0 \ , \ 8)$, $(0 \ , \ 8)$

סעיף ב

נציב $x = 0$:

$$2y = 12 \Longrightarrow y = 6$$

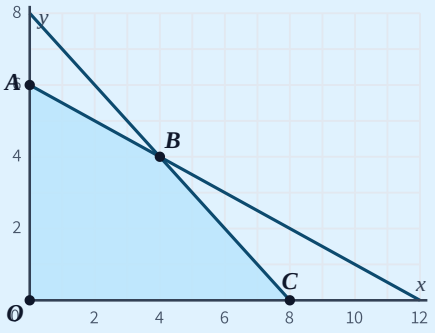
נציב $y = 0$:

$$x = 12$$

תשובה: $(0 \ , \ 6)$, $(12 \ , \ 0)$

סעיף ג

הנקודה $(0 \ , \ 0)$ מקיימת את שני האילוצים, לכן התחום מתחת לשני הישרים:



על ציר ה־y לוקחים את הנקודה הנמוכה $(0 \ , \ 6)$, ועל ציר ה־x את הקרובה $(0 \ , \ 8)$.

מפגש שני הישרים:

$$x + y = 8$$

$$x + 2y = 12$$

נחסר את המשוואה הראשונה מהשנייה:

$$y = 4$$

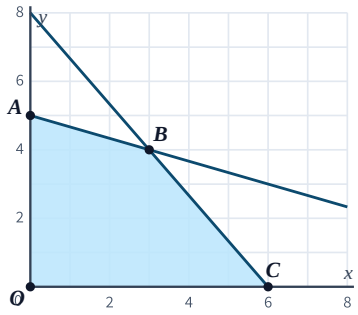
$$x = 8 - 4 = 4$$

תשובה: $(0 \ , \ 8)$, $(4 \ , \ 4)$, $(0 \ , \ 6)$, $(0 \ , \ 0)$

2 שאלה 2 בסיסי

בסרטוט התחום האפשרי של מערכת האילוצים:

$x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ x + 3y \leq 15 \ , \ 4x + 3y \leq 24$



א. מצאו את שיעורי הנקודות $A \ , \ B$ ו־C.

ב. מצאו את הערך הגדול ביותר של $f = 2x + 3y$ בתחום, ובאיזו נקודה הוא מתקבל.

ג. מצאו את הערך הגדול ביותר של $g = 5x + 2y$ בתחום, ובאיזו נקודה הוא מתקבל.

ד. האם הנקודה $(5 \ , \ 2)$ נמצאת בתחום? נמקו.

סעיף א

A על ציר ה־y ועל הישר $x + 3y = 15$:

$$3y = 15 \Longrightarrow y = 5$$

C על ציר ה־x ועל הישר $4x + 3y = 24$:

$$4x = 24 \Longrightarrow x = 6$$

B – מפגש שני הישרים. נחסר:

$$(4x + 3y) - (x + 3y) = 24 - 15$$

$$3x = 9 \Longrightarrow x = 3$$

$$3 + 3y = 15 \Longrightarrow y = 4$$

תשובה: $A(0 \ , \ 5) \ , \ B(3 \ , \ 4) \ , \ C(6 \ , \ 0)$

סעיף ב

בנקודה $O(0 \ , \ 0)$:

$$f = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$$

בנקודה $A(0 \ , \ 5)$:

$$f = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$$

בנקודה $B(3 \ , \ 4)$:

$$f = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18$$

בנקודה $C(6 \ , \ 0)$:

$$f = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 = 12$$

הגדול ביותר: 18 , בנקודה B.

תשובה: 18 , בנקודה $B(3 \ , \ 4)$

סעיף ג

בנקודה $A(0 \ , \ 5)$:

$$g = 5 \cdot 0 + 2 \cdot 5 = 10$$

בנקודה $B(3 \ , \ 4)$:

$$g = 5 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 23$$

בנקודה $C(6 \ , \ 0)$:

$$g = 5 \cdot 6 + 2 \cdot 0 = 30$$

(ב־O הערך 0.) הגדול ביותר: 30 , בנקודה C.

תשובה: 30 , בנקודה $C(6 \ , \ 0)$

סעיף ד

נציב באילוץ $x + 3y \leq 15$:

$$2 + 3 \cdot 5 = 17$$

$$17 > 15$$

האילוץ לא מתקיים, לכן הנקודה מחוץ לתחום.

תשובה: לא

3 שאלה 3 בסיסי

מורה קונה פרסים לכיתה: x ספרים ו־y משחקים. ספר עולה 30 שקלים ומשחק עולה 60 שקלים.
למורה יש לכל היותר 600 שקלים, והיא רוצה לקנות לפחות 4 ספרים.

א. כתבו את מערכת האילוצים.

ב. מצאו את קודקודי התחום האפשרי.

ג. האם המורה יכולה לקנות 9 ספרים ו־6 משחקים? נמקו.

ד. מהו המספר הגדול ביותר של פרסים (ספרים ומשחקים יחד) שהמורה יכולה לקנות?

סעיף א

לפחות 4 ספרים: $x \geq 4$; מספר המשחקים אינו שלילי: $y \geq 0$

המחיר של x ספרים: $30x$, של y משחקים: $60y$. לכל היותר 600:

$$30x + 60y \leq 600$$

תשובה: $x \geq 4 \text{ , } y \geq 0 \text{ , } 30x + 60y \leq 600$

סעיף ב

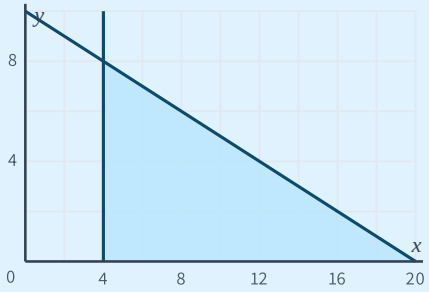
הישר $30x + 60y = 600$: נציב $y = 0 \Longleftarrow x = 20$.

מפגש עם $x = 4$:

$$30 \cdot 4 + 60y = 600$$

$$60y = 480 \Longrightarrow y = 8$$

והמפגש של $x = 4$ עם ציר ה־x : $(4 \text{ , } 0)$



תשובה: $(0 \text{ , } 20) \text{ , } (8 \text{ , } 4) \text{ , } (0 \text{ , } 4)$

סעיף ג

נציב $y = 6 \text{ , } x = 9$ באילוץ המחיר:

$$30 \cdot 9 + 60 \cdot 6 = 270 + 360 = 630$$

$$630 > 600$$

האילוץ לא מתקיים – אין לה מספיק כסף.

תשובה: **לא**

סעיף ד

פונקציית המטרה: $f = x + y$

בנקודה $(0 \text{ , } 4)$:

$$f = 4 + 0 = 4$$

בנקודה $(8 \text{ , } 4)$:

$$f = 4 + 8 = 12$$

בנקודה $(0 \text{ , } 20)$:

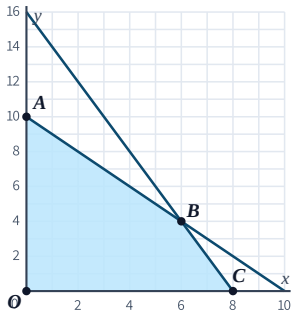
$$f = 20 + 0 = 20$$

הגדול ביותר: 20 , כשקונים 20 ספרים ו־0 משחקים.

תשובה: **20 פרסים (20 ספרים)**

4 שאלה 4 בינוני

מאפייה מכינה בכל יום x עוגות ו־y פשטידות. בכל יום מכינים לכל היותר 10 מאפים.
הכנת עוגה דורשת שעתיים עבודה, והכנת פשטידה דורשת שעה אחת. בכל יום יש לכל היותר 16 שעות עבודה.
הרווח מעוגה הוא 30 שקלים, ומפשטידה 20 שקלים.



א. כתבו את מערכת האילוצים.

ב. בסרטוט התחום האפשרי. מצאו את שיעורי הנקודות A , B ו־C .

ג. כתבו את פונקציית המטרה של הרווח היומי.

ד. כמה עוגות וכמה פשטידות צריך להכין כדי שהרווח יהיה מקסימלי? מהו הרווח?

סעיף א

$$x \geq 0 \ , \ y \geq 0$$

לכל היותר 10 מאפים:

$$x + y \leq 10$$

שעות העבודה: x עוגות דורשות $2x$ שעות, y פשטידות דורשות y שעות:

$$2x + y \leq 16$$

תשובה: $x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ x + y \leq 10 \ , \ 2x + y \leq 16$

סעיף ב

A על ציר ה־y : הישר $x + y = 10$ חותך ב־$y = 10$, והישר $2x + y = 16$ ב־$y = 16$. לוקחים את הנמוכה: $A(0 \ , \ 10)$

C על ציר ה־x : $x = 10$ או $x = 8$. לוקחים את הקרובה: $C(8 \ , \ 0)$

B – מפגש הישרים. נחסר:

$$(2x + y) - (x + y) = 16 - 10$$

$$x = 6$$

$$6 + y = 10 \Longrightarrow y = 4$$

תשובה: $A(0 \ , \ 10) \ , \ B(6 \ , \ 4) \ , \ C(8 \ , \ 0)$

סעיף ג

$$f(x \ , \ y) = a \cdot x + b \cdot y$$

נציב $a = 30 \ , \ b = 20$:

$$f = 30x + 20y$$

תשובה: $f = 30x + 20y$

סעיף ד

בנקודה $A(0 \ , \ 10)$:

$$f = 30 \cdot 0 + 20 \cdot 10 = 200$$

בנקודה $B(6 \ , \ 4)$:

$$f = 30 \cdot 6 + 20 \cdot 4 = 260$$

בנקודה $C(8 \ , \ 0)$:

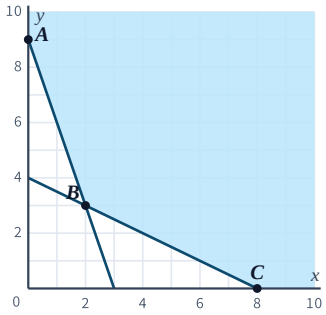
$$f = 30 \cdot 8 + 20 \cdot 0 = 240$$

(ב־$O(0 \ , \ 0)$ הרווח 0.) הגדול ביותר – בנקודה B .

תשובה: 6 עוגות ו־4 פשטידות, רווח 260 שקלים

5 שאלה 5 בינוני

חקלאי מכין תערובת מזון לפרות משני סוגי מספוא: x ק"ג מסוג א ו־y ק"ג מסוג ב.
בכל ק"ג מסוג א יש 3 יחידות חלבון ויחידת סיבים אחת. בכל ק"ג מסוג ב יש יחידת חלבון אחת ו־2 יחידות סיבים.
בתערובת צריכות להיות לפחות 9 יחידות חלבון ולפחות 8 יחידות סיבים.
ק"ג מסוג א עולה 8 שקלים, וק"ג מסוג ב עולה 5 שקלים.



א. כתבו את מערכת האילוצים.

ב. בסרטוט התחום האפשרי. מצאו את שיעורי הנקודות A , B ו־C .

ג. מה הכמות מכל סוג שתיתן תערובת זולה ביותר? מהו המחיר?

ד. האם תערובת של 1 ק"ג מסוג א ו־4 ק"ג מסוג ב מתאימה? נמקו.

סעיף א

$$x \geq 0 \ , \ y \geq 0$$

חלבון – לפחות 9 :

$$3x + y \geq 9$$

סיבים – לפחות 8 :

$$x + 2y \geq 8$$

תשובה: $x + 2y \geq 8 \ , \ 3x + y \geq 9 \ , \ y \geq 0 \ , \ x \geq 0$

סעיף ב

כאן התחום מעל שני הישרים (הנקודה $(0 \ , \ 0)$ לא מקיימת $3x + y \geq 9$).

A : על ציר ה־y לוקחים את הגבוהה – $3x + y = 9$ נותן $y = 9$, ו־$x + 2y = 8$ נותן $y = 4$. לכן $A(0 \ , \ 9)$

C : על ציר ה־x לוקחים את הרחוקה – $x = 3$ או $x = 8$. לכן $C(8 \ , \ 0)$

B – מפגש הישרים: מהראשון $y = 9 - 3x$. נציב בשני:

$$x + 2(9 - 3x) = 8$$

$$x + 18 - 6x = 8$$

$$-5x = -10 \Longrightarrow x = 2$$

$$y = 9 - 6 = 3$$

תשובה: $A(0 \ , \ 9) \ , \ B(2 \ , \ 3) \ , \ C(8 \ , \ 0)$

סעיף ג

פונקציית המטרה (הוצאות): $f = 8x + 5y$

בנקודה $A(0 \ , \ 9)$:

$$f = 8 \cdot 0 + 5 \cdot 9 = 45$$

בנקודה $B(2 \ , \ 3)$:

$$f = 8 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 31$$

בנקודה $C(8 \ , \ 0)$:

$$f = 8 \cdot 8 + 5 \cdot 0 = 64$$

הוצאות – בוחרים את הקטן ביותר: 31 , בנקודה B .

תשובה: 2 ק"ג מסוג א ו־3 ק"ג מסוג ב, 31 שקלים

סעיף ד

חלבון: $3 \cdot 1 + 4 = 7$, ו־$7 < 9$

אין מספיק חלבון, לכן הנקודה $(4 \ , \ 1)$ מחוץ לתחום.

תשובה: לא

6 שאלה 6 בינוני

מפעל מייצר בכל יום x כיסאות ו־y שולחנות. בכל יום מייצרים לכל היותר 12 רהיטים, לפחות 2 שולחנות, ומספר הכיסאות הוא לפחות פי 2 ממספר השולחנות.
הרווח מכיסא הוא 50 שקלים, ומשולחן 120 שקלים.

א. כתבו את מערכת האילוצים.

ב. מצאו את קודקודי התחום האפשרי.

ג. כמה כיסאות וכמה שולחנות צריך לייצר כדי שהרווח יהיה מקסימלי? מהו הרווח?

סעיף א

לכל היותר 12 רהיטים:

$$x + y \le 12$$

לפחות 2 שולחנות:

$$y \ge 2$$

הכיסאות לפחות פי 2 מהשולחנות:

$$x \ge 2y$$

(מכאן גם $x \ge 0$.)

תשובה: $x + y \le 12 \ , \ y \ge 2 \ , \ x \ge 2y$

סעיף ב

מפגש $y = 2$ ו־$x = 2y$:

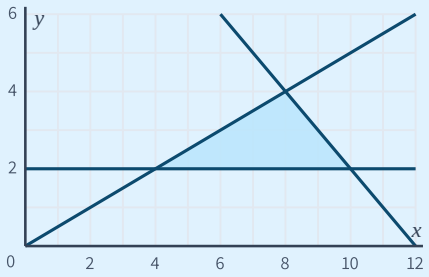
$$x = 4 \Longrightarrow (4 \ , \ 2)$$

מפגש $x = 2y$ ו־$x + y = 12$:

$$2y + y = 12 \Longrightarrow y = 4 \ , \ x = 8$$

מפגש $y = 2$ ו־$x + y = 12$:

$$x = 10 \Longrightarrow (10 \ , \ 2)$$



תשובה: $(2 \ , \ 10) \ , \ (4 \ , \ 8) \ , \ (2 \ , \ 4)$

סעיף ג

$$f = 50x + 120y$$

בנקודה $(2 \ , \ 4)$:

$$f = 50 \cdot 4 + 120 \cdot 2 = 440$$

בנקודה $(4 \ , \ 8)$:

$$f = 50 \cdot 8 + 120 \cdot 4 = 880$$

בנקודה $(2 \ , \ 10)$:

$$f = 50 \cdot 10 + 120 \cdot 2 = 740$$

הגדול ביותר: 880.

תשובה: 8 כיסאות ו־4 שולחנות, 880 שקלים

7 שאלה 7 מתקדם

משאית מובילה x ארגזי תפוזים ו־y ארגזי תפוחים. ארגז תפוזים שוקל 20 ק"ג, וארגז תפוחים שוקל 15 ק"ג.
המשאית יכולה להוביל לכל היותר 600 ק"ג ולכל היותר 36 ארגזים. בכל נסיעה מובילים לפחות 6 ארגזי תפוזים.
הרווח מארגז תפוזים הוא 25 שקלים, ומארגז תפוחים 20 שקלים.

א. כתבו את מערכת האילוצים.

ב. מצאו את קודקודי התחום האפשרי.

ג. כמה ארגזים מכל סוג צריך להוביל כדי שהרווח יהיה מקסימלי? מהו הרווח?

ד. הרווח מארגז תפוזים עלה ל־30 שקלים. בכמה שקלים גדל הרווח המקסימלי?

סעיף א

$$x \geq 6 \ , \ y \geq 0$$

משקל:

$$20x + 15y \leq 600$$

מספר ארגזים:

$$x + y \leq 36$$

תשובה:

$$\mathbf{x \geq 6 \ , \ y \geq 0 \ , \ 20x + 15y \leq 600 \ , \ x + y \leq 36}$$

סעיף ב

$$20x + 15y = 600 \ , \ y = 0 \Longrightarrow x = 30$$

מפגש $x = 6$ ו־$x + y = 36$:

$$y = 30$$

(בדיקה במשקל: $120 + 450 = 570 \leq 600$)

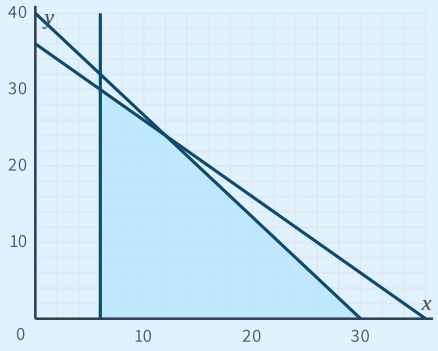
מפגש שני הישרים: נחלק את הראשון ב־5:

$$4x + 3y = 120$$

$$3x + 3y = 108$$

נחסר:

$$x = 12 \ , \ y = 24$$



תשובה: $\mathbf{(0 \ , \ 0) \ , \ (30 \ , \ 0) \ , \ (12 \ , \ 24) \ , \ (6 \ , \ 30) \ , \ (6 \ , \ 0)}$

סעיף ג

$$f = 25x + 20y$$

בנקודה $(0 , 6)$:

$$f = 25 \cdot 6 = 150$$

בנקודה $(30 , 6)$:

$$f = 25 \cdot 6 + 20 \cdot 30 = 750$$

בנקודה $(24 , 12)$:

$$f = 25 \cdot 12 + 20 \cdot 24 = 780$$

בנקודה $(0 , 30)$:

$$f = 25 \cdot 30 = 750$$

הגדול ביותר: 780 .

תשובה: **12 ארגזי תפוזים ו־24 ארגזי תפוחים, 780 שקלים**

סעיף ד

$$f = 30x + 20y$$

בנקודה $(30 , 6)$:

$$f = 30 \cdot 6 + 20 \cdot 30 = 780$$

בנקודה $(24 , 12)$:

$$f = 30 \cdot 12 + 20 \cdot 24 = 840$$

בנקודה $(0 , 30)$:

$$f = 30 \cdot 30 = 900$$

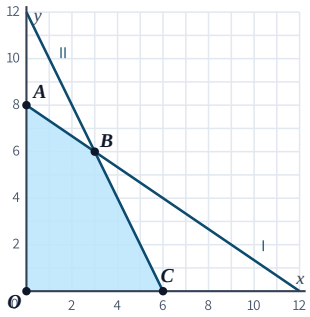
(ב־$(0 , 6)$: 180.) המקסימום החדש 900 , בנקודה $(0 , 30)$.

$$900 - 780 = 120$$

תשובה: **ב־120 שקלים (מ־780 ל־900)**

8 שאלה 8 מתקדם

בסרטוט שני ישרים: הישר I עובר דרך הנקודות $(8 , 0)$ ו־$(0 , 12)$, והישר II עובר דרך הנקודות $(12 , 0)$ ו־$(0 , 6)$. התחום האפשרי מסומן.



א. מצאו את משוואות הישרים I ו־II (בצורה $ax + by = c$).

ב. כתבו את מערכת האילוצים של התחום המסומן.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה B .

ד. מצאו את הערך הגדול ביותר של $f = 4x + 5y$ בתחום.

סעיף א

ישר I : שיפוע $\frac{0 - 8}{12 - 0} = -\frac{2}{3}$

$$y = -\frac{2}{3}x + 8$$

נכפול ב־3:

$$3y = -2x + 24 \Longrightarrow 2x + 3y = 24$$

ישר II : שיפוע $\frac{0 - 12}{6 - 0} = -2$

$$y = -2x + 12 \Longrightarrow 2x + y = 12$$

תשובה: **$II: 2x + y = 12$; $I: 2x + 3y = 24$**

סעיף ב

התחום ברביע הראשון ומתחת לשני הישרים (הנקודה $(0 , 0)$ בתוכו):

$$2x + 3y \leq 24$$

$$2x + y \leq 12$$

תשובה: **$x \geq 0 , y \geq 0 , 2x + 3y \leq 24 , 2x + y \leq 12$**

סעיף ג

$$2x + 3y = 24$$
$$2x + y = 12$$

נחסר:

$$2y = 12 \Longrightarrow y = 6$$
$$2x + 6 = 12 \Longrightarrow x = 3$$

תשובה: $B(3\ ,\ 6)$

סעיף ד

בנקודה $A(0\ ,\ 8)$:

$$f = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 8 = 40$$

בנקודה $B(3\ ,\ 6)$:

$$f = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 6 = 42$$

בנקודה $C(6\ ,\ 0)$:

$$f = 4 \cdot 6 + 5 \cdot 0 = 24$$

(ב־O: 0.) הגדול ביותר: 42 .

תשובה: $B(3\ ,\ 6)$ **, בנקודה 42**

9 שאלה 9 מתקדם

אולם אירועים שוכר x שולחנות קטנים של 4 מקומות ו־y שולחנות גדולים של 8 מקומות.
צריך לפחות 96 מקומות ישיבה. באולם יש מקום ל־20 שולחנות לכל היותר, ואפשר לשכור לכל היותר 10 שולחנות גדולים.
שולחן קטן עולה 50 שקלים, ושולחן גדול 80 שקלים.

א. כתבו את מערכת האילוצים.

ב. מצאו את קודקודי התחום האפשרי.

ג. כמה שולחנות מכל סוג צריך לשכור כדי שהמחיר יהיה הנמוך ביותר? מהו המחיר?

ד. כמה מקומות ישיבה יהיו באולם באפשרות הזולה ביותר?

סעיף א

$$x \geq 0\ ,\ y \geq 0$$

מקומות ישיבה:

$$4x + 8y \geq 96$$

(או, אחרי חלוקה ב־4: $x + 2y \geq 24$)

מספר השולחנות:

$$x + y \leq 20$$

שולחנות גדולים:

$$y \leq 10$$

תשובה:

$$x \geq 0\ ,\ 0 \leq y \leq 10\ ,\ 4x + 8y \geq 96\ ,\ x + y \leq 20$$

סעיף ב

מפגש $y = 10$ ו־$x + 2y = 24$:

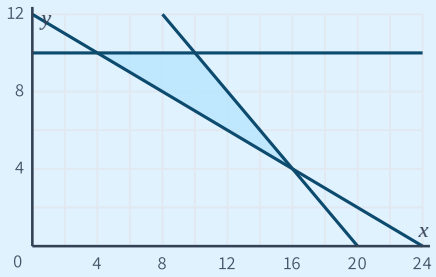
$$x = 24 - 20 = 4$$

מפגש $y = 10$ ו־$x + y = 20$:

$$x = 10$$

מפגש $x + 2y = 24$ ו־$x + y = 20$. נחסר:

$$y = 4\ ,\ x = 16$$



תשובה: $(4\ ,\ 10)$ **,** $(10\ ,\ 10)$ **,** $(16\ ,\ 4)$

סעיף ג

$$f = 50x + 80y$$

בנקודה $(10\ ,\ 4)$:

$$f = 50 \cdot 4 + 80 \cdot 10 = 1{,}000$$

בנקודה $(10\ ,\ 10)$:

$$f = 50 \cdot 10 + 80 \cdot 10 = 1{,}300$$

בנקודה $(4\ ,\ 16)$:

$$f = 50 \cdot 16 + 80 \cdot 4 = 1{,}120$$

הוצאות – הקטן ביותר: $1{,}000$.

תשובה: **4 קטנים ו־10 גדולים, 1,000 שקלים**

סעיף ד

$$4 \cdot 4 + 8 \cdot 10 = 16 + 80 = 96$$

תשובה: **96 מקומות**