

הפתרון המלא של כל שאלה בדף העבודה, שלב אחרי שלב. התשובה הסופית של כל סעיף מסומנת באדום.

1 שאלה 1 בסיסי

מצאו פונקציה קדומה לכל אחת מהפונקציות:

א. $f(x) = (3x - 1)^4$

ב. $f(x) = \frac{1}{(2x + 1)^2}$

ג. $f(x) = \sqrt{4x + 1}$

ד. $f(x) = \sin(2x)$

סעיף ב

$$f(x) = (2x + 1)^{-2}$$

$$F(x) = \frac{(2x + 1)^{-1}}{-1 \cdot 2} + C = -\frac{1}{2(2x + 1)} + C$$

תשובה: $F(x) = -\frac{1}{2(2x + 1)} + C$

סעיף ז

$$F(x) = -\frac{\cos(2x)}{2} + C$$

בדיקה: $F'(x) = \frac{2\sin(2x)}{2} = \sin(2x)$

תשובה: $F(x) = -\frac{\cos(2x)}{2} + C$

סעיף א

הנגזרת הפנימית היא 3, לכן מחלקים ב-3:

$$F(x) = \frac{(3x - 1)^5}{5 \cdot 3} + C = \frac{(3x - 1)^5}{15} + C$$

תשובה: $F(x) = \frac{(3x - 1)^5}{15} + C$

סעיף ג

$$f(x) = (4x + 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{(4x + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot 4} = \frac{(4x + 1)^{\frac{3}{2}}}{6}$$

$$F(x) = \frac{(4x + 1)\sqrt{4x + 1}}{6} + C$$

תשובה: $F(x) = \frac{(4x + 1)\sqrt{4x + 1}}{6} + C$

חשבו בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית:

א. $\int 2x(x^2 + 3)^4 dx$

ב. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} dx$

ג. $\int \cos(x) \cdot \sin^2(x) dx$

סעיף א

הביטוי $2x$ הוא הנגזרת של $x^2 + 3$:

$$\int 2x(x^2 + 3)^4 dx = \frac{(x^2 + 3)^5}{5} + C$$

תשובה: $\frac{(x^2 + 3)^5}{5} + C$

סעיף ג

הביטוי $\cos(x)$ הוא הנגזרת של $\sin(x)$:

$$\int \cos(x) \cdot \sin^2(x) dx = \frac{\sin^3(x)}{3} + C$$

תשובה: $\frac{\sin^3(x)}{3} + C$

סעיף ב

הנגזרת של $\sqrt{x^2 + 16}$ היא:

$$\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 16}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} dx = \sqrt{x^2 + 16} + C$$

תשובה: $\sqrt{x^2 + 16} + C$

חשבו את האינטגרלים:

א. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx$

ב. $\int_0^2 x(x^2 + 1)^2 dx$

ג. $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} dx$

סעיף א

$$= [\sin(x)] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$$

תשובה: 1

סעיף ג

$$= [\sqrt{2x + 1}] \Big|_0^4 = 3 - 1 = 2$$

תשובה: 2

סעיף ב

$$= \left[\frac{(x^2 + 1)^3}{6} \right] \Big|_0^2$$

$$= \frac{125}{6} - \frac{1}{6} = \frac{124}{6} = \frac{62}{3}$$

תשובה: $\frac{62}{3} \approx 20.67$

נתונה הפונקציה f שהנגזרת שלה היא $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$. גרף הפונקציה עובר בנקודה $(2, 1)$.

- מצאו את $f(x)$.
- מצאו את משוואת המשיק לגרף f בנקודה $(2, 1)$.
- מצאו את נקודת הקיצון של f וקבעו את סוגה.

סעיף א

$$f(x) = \sqrt{x^2+5} + C$$

$$\sqrt{9} + C = 1$$

$$C = -2$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+5} - 2 \quad \text{תשובה:}$$

סעיף ג

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

משמאל ל-0 הנגזרת שלילית ומימין חיובית, לכן מינימום.

$$f(0) = \sqrt{5} - 2 \approx 0.24$$

$$(0, \sqrt{5} - 2) \quad \text{תשובה: מינימום}$$

סעיף ב

$$f(2) = \frac{2}{3}$$

$$y - 1 = \frac{2}{3}(x - 2)$$

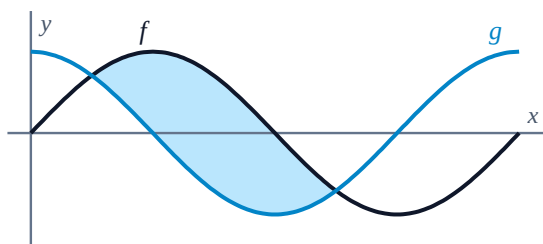
$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \quad \text{תשובה:}$$

נתונות הפונקציות $f(x) = \sin(x)$ ו- $g(x) = \cos(x)$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

א. מצאו את נקודות החיתוך של שני הגרפים בתחום.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים בין נקודות החיתוך.



סעיף א

$$\sin(x) = \cos(x)$$

$$\tan(x) = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{5\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4} \text{ בתחום}$$

$$\text{תשובה: } x = \frac{5\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}$$

סעיף ב

בין נקודות החיתוך $\sin(x) \geq \cos(x)$:

$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin(x) - \cos(x)) dx$$

$$= [-\cos(x) - \sin(x)] \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ = 2\sqrt{2}$$

$$\text{תשובה: } 2\sqrt{2} \approx 2.83$$

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4}{(x+1)^2}$ בתחום $x \geq 0$.

א. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הצירים והישר $x = 3$.

ב. מצאו את $k > 0$ כך שהשטח המוגבל על ידי הגרף, הצירים והישר $x = k$ יהיה שווה ל-2.

סעיף א

$$\int_0^3 \frac{4}{(x+1)^2} dx = \left[-\frac{4}{x+1} \right]_0^3 \\ = -1 - (-4) = 3$$

תשובה: 3

סעיף ב

$$4 - \frac{4}{k+1} = 2$$

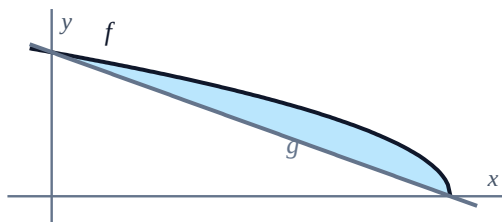
$$\frac{4}{k+1} = 2$$

$$k = 1$$

תשובה: $k = 1$

נתונות הפונקציות $f(x) = \sqrt{9-x}$ ו- $g(x) = 3 - \frac{x}{3}$.

- א. הראו ששני הגרפים נחתכים בנקודות $(0, 3)$ ו- $(9, 0)$.
 ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים.



סעיף א

$$x = 0 : f(0) = 3, g(0) = 3$$

$$x = 9 : f(9) = 0, g(9) = 0$$

נוודא שאין נקודות נוספות:

$$9 - x = \left(3 - \frac{x}{3}\right)^2$$

$$x^2 - 9x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 9$$

תשובה: הנקודות $(0, 3)$, $(9, 0)$

סעיף ב

$$\int_0^9 \sqrt{9-x} \, dx = \left[-\frac{2}{3}(9-x)\sqrt{9-x}\right]_0^9 = 18$$

$$\frac{9 \cdot 3}{2} = 13.5 \text{ משולש:}$$

$$S = 18 - 13.5 = 4.5$$

תשובה: 4.5

8 שאלה 8 מתקדם

נתונה הפונקציה $G(x) = \int_0^x (t^2 - 4t + 3) \, dt$.

- א. מצאו את $G'(x)$.
 ב. מצאו את נקודות הקיצון של G וקבעו את סוגן.
 ג. מצאו את כל הערכים של x שעבורם $G(x) = 0$.

סעיף א

לפי המשפט היסודי:

$$G'(x) = x^2 - 4x + 3$$

תשובה: $G'(x) = x^2 - 4x + 3$

סעיף ב

$$G'(x) = (x-1)(x-3) = 0$$

$$x = 1, x = 3$$

$$G(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$$

$$G(1) = \frac{4}{3}, G(3) = 0$$

הנגזרת חיובית לפני 1, שלילית בין 1 ל-3 וחיובית אחרי 3.

תשובה: $(1, \frac{4}{3})$ מקסימום, $(3, 0)$ מינימום

סעיף ג

$$\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x = 0$$

$$\frac{x}{3}(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$\frac{x}{3}(x - 3)^2 = 0$$

$$x = 0, x = 3$$

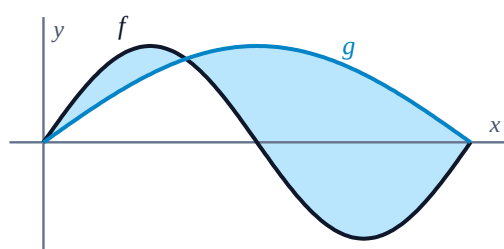
תשובה: $x = 0, x = 3$

9 שאלה 9 מתקדם

נתונות הפונקציות $f(x) = \sin(x)$ ו- $g(x) = \sin(2x)$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

א. מצאו את נקודות החיתוך של שני הגרפים בתחום.

ב. חשבו את סכום השטחים המוגבלים בין שני הגרפים בתחום.



סעיף ב

בין 0 ל- $\frac{\pi}{3}$ הגרף של f למעלה:

$$S_1 = \left[-\frac{\cos(2x)}{2} + \cos(x) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

בין $\frac{\pi}{3}$ ל- π הגרף של g למעלה:

$$S_2 = \left[-\cos(x) + \frac{\cos(2x)}{2} \right] \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$S = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}$$

תשובה: $\frac{5}{2} = 2.5$

סעיף א

$$2\sin(x)\cos(x) = \sin(x)$$

$$\sin(x)(2\cos(x) - 1) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pi$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

תשובה: $x = 0, x = \frac{\pi}{3}, x = \pi$

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$.

א. מצאו פונקציה קדומה של f .

ב. השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, ציר x והישר $x = k$ ($k > 0$) שווה ל-0.4. מצאו את k .

ג. מה מתקרב השטח המוגבל על ידי הגרף, ציר x והישר $x = k$ כאשר k גדל מאוד?

סעיף א

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x(x^2 + 1)^{-2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + 1)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{2(x^2 + 1)} + C$$

$$F(x) = -\frac{1}{2(x^2 + 1)} + C \quad \text{תשובה: } C$$

סעיף ג

$$\frac{1}{2(k^2 + 1)} \rightarrow 0$$

לכן השטח מתקרב ל- $\frac{1}{2}$ (ואף פעם לא מגיע אליו).

$$\frac{1}{2} \quad \text{תשובה: } \frac{1}{2}$$

סעיף ב

$$\int_0^k f(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(k^2 + 1)} = 0.4$$

$$\frac{1}{2(k^2 + 1)} = 0.1$$

$$k^2 + 1 = 5$$

$$k = 2$$

$$k = 2 \quad \text{תשובה: } k = 2$$