דף עבודה – תרגול נוסף · גדילה ודעיכה

פתרונות מלאים

גורם גדילה ודעיכה · כמות אחרי t תקופות · מציאת q · כמה זמן עבר

הפתרון המלא של כל שאלה בדף העבודה, שלב אחרי שלב. התשובה הסופית של כל סעיף מסומנת באדום.

1 שאלה 1 בסיסי

רונית הפקידה בבנק 8,000 שקלים בריבית קבועה של 3% בשנה.

א. מהו גורם הגדילה q?

ב. כמה כסף יהיה לרונית בבנק אחרי 4 שנים?

ג. כמה שקלים הרוויחה רונית בארבע השנים?

סעיף א

$$q = 1 + \frac{3}{100} = 1.03$$

תשובה: $q = 1.03$

סעיף ב

$$M_t = M_0 \cdot q^t$$

נציב $M_0 = 8{,}000$, $q = 1.03$, $t = 4$:

$$M_4 = 8{,}000 \cdot 1.03^4$$

$$M_4 \approx 8{,}000 \cdot 1.1255088$$

$$M_4 \approx 9{,}004.07$$

תשובה: $M_4 \approx 9{,}004.07$ **שקלים**

סעיף ג

$$9{,}004.07 - 8{,}000 = 1{,}004.07$$

תשובה: $1{,}004.07$ **שקלים**

2 שאלה 2 בסיסי

מכונית חדשה עולה 90,000 שקלים. בכל שנה יורד ערך המכונית ב־12%.

א. מהו גורם הדעיכה q?

ב. מה יהיה ערך המכונית אחרי 3 שנים?

ג. בכמה אחוזים ירד ערך המכונית בשלוש השנים?

סעיף א

$$q = 1 - \frac{12}{100} = 0.88$$

תשובה: $q = 0.88$

סעיף ב

$$M_t = M_0 \cdot q^t$$

נציב $M_0 = 90{,}000$, $q = 0.88$, $t = 3$:

$$M_3 = 90{,}000 \cdot 0.88^3$$

$$M_3 = 90{,}000 \cdot 0.681472$$

$$M_3 = 61{,}332.48$$

תשובה: $M_3 \approx 61{,}332.48$ שקלים

סעיף ג

$$90{,}000 - 61{,}332.48 = 28{,}667.52$$

$$\frac{28{,}667.52}{90{,}000} \cdot 100 \approx 31.85\%$$

(או: $1 - 0.681472 = 0.318528$, כלומר כ־31.85%)

תשובה: בכ־31.85%

3 שאלה 3 בסיסי

בעיר מסוימת גרים היום 25,000 תושבים. מספר התושבים גדל ב־2% בכל שנה.

א. כמה תושבים יגורו בעיר בעוד 5 שנים?

ב. כמה תושבים גרו בעיר לפני שנתיים?

סעיף א

$$q = 1 + \frac{2}{100} = 1.02$$

$$M_t = M_0 \cdot q^t$$

נציב $M_0 = 25{,}000$, $q = 1.02$, $t = 5$:

$$M_5 = 25{,}000 \cdot 1.02^5$$

$$M_5 \approx 25{,}000 \cdot 1.1040808$$

$$M_5 \approx 27{,}602$$

תשובה: כ־27,602 תושבים

סעיף ב

לפני שנתיים הייתה כמות ההתחלה M_0 , ואחרי 2 שנים הגיעה ל־25,000:

$$M_t = M_0 \cdot q^t$$

נציב $M_2 = 25{,}000$, $q = 1.02$, $t = 2$:

$$25{,}000 = M_0 \cdot 1.02^2$$

$$25{,}000 = M_0 \cdot 1.0404$$

$$M_0 = \frac{25{,}000}{1.0404} \approx 24{,}029$$

תשובה: כ־24,029 תושבים

4 שאלה 4 בינוני

מחיר דירה עלה ב־2 שנים מ־1,200,000 שקלים ל־1,452,000 שקלים. בכל שנה המחיר עלה באותו אחוז.

א. מצאו את גורם הגדילה q.

ב. בכמה אחוזים עלה מחיר הדירה בכל שנה?

ג. אם המחיר ימשיך לעלות באותו אחוז, מה יהיה מחיר הדירה שנתיים אחרי 1,452,000?

סעיף א

$$M_t = M_0 \cdot q^t$$

נציב $t = 2 , M_2 = 1,452,000 , M_0 = 1,200,000$:

$$1,452,000 = 1,200,000 \cdot q^2$$

$$q^2 = \frac{1,452,000}{1,200,000} = 1.21$$

$$q = \sqrt{1.21} = 1.1$$

(גדילה, לכן q חיובי וגדול מ־1)

תשובה: $q = 1.1$

סעיף ב

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

$$1.1 = 1 + \frac{p}{100}$$

$$p = 10$$

תשובה: ב־10%

סעיף ג

$$M_2 = 1,452,000 \cdot 1.1^2$$

$$M_2 = 1,452,000 \cdot 1.21 = 1,756,920$$

תשובה: 1,756,920 שקלים

5 שאלה 5 בינוני

חולה קיבל זריקה של 400 מיליגרם תרופה. בכל שעה כמות התרופה בדם קטנה ב־25%.

א. כמה מיליגרם תרופה יהיו בדם אחרי 3 שעות?

ב. אחרי כמה שעות שלמות תהיה בדם לראשונה כמות של פחות מ־100 מיליגרם?

ג. כמה אחוזים מהכמות ההתחלתית נשארו בדם אחרי 5 שעות?

סעיף א

$$q = 1 - \frac{25}{100} = 0.75$$

$$M_t = M_0 \cdot q^t$$

נציב $M_0 = 400 , q = 0.75 , t = 3$:

$$M_3 = 400 \cdot 0.75^3$$

$$M_3 = 400 \cdot 0.421875 = 168.75$$

תשובה: 168.75 מיליגרם

סעיף ג

$$0.75^5 \approx 0.2373$$

$$0.2373 \cdot 100 = 23.73\%$$

(בדיקה: $0.2373 \approx \frac{94.92}{400}$)

תשובה: כ־23.73%

סעיף ב

נציב ערכים של t בנוסחה $M_t = 400 \cdot 0.75^t$:

t	3	4	5
M_t	168.75	≈ 126.56	≈ 94.92

אחרי 4 שעות עוד יש יותר מ־100 , ואחרי 5 שעות כבר פחות.

תשובה: אחרי 5 שעות

6 שאלה 6 בינוני

יוסי רוצה להפקיד 10,000 שקלים לשלוש שנים. יש לו שתי הצעות:

הצעה א: ריבית של 5% בשנה.

הצעה ב: ריבית של 0.4% בחודש.

א. כמה כסף יהיה ליוסי אחרי 3 שנים בהצעה א?

ב. כמה כסף יהיה ליוסי אחרי 3 שנים בהצעה ב?

ג. איזו הצעה כדאית יותר ליוסי? נמקו.

סעיף א

$$M_3 = 10{,}000 \cdot 1.05^3$$

$$M_3 = 10{,}000 \cdot 1.157625 = 11{,}576.25$$

תשובה: **11,576.25 שקלים**

סעיף ב

בשלוש שנים יש $3 \cdot 12 = 36$ חודשים, ו־$q = 1.004$:

$$M_{36} = 10{,}000 \cdot 1.004^{36}$$

$$M_{36} \approx 10{,}000 \cdot 1.154550$$

$$M_{36} \approx 11{,}545.5$$

תשובה: **כ־11,545.5 שקלים**

סעיף ג

$$11{,}576.25 - 11{,}545.5 = 30.75$$

בהצעה א יהיה ליוסי יותר כסף, לכן היא כדאית יותר.

תשובה: **הצעה א (בערך 30.75 שקלים יותר)**

7 שאלה 7 מתקדם

במעבדה גדלות שתי תרביות חיידקים.
בתרבית א היו בהתחלה 500 חיידקים, ומספרם גדל ב־20% בכל שעה.
בתרבית ב היו בהתחלה 2,000 חיידקים, ומספרם קטן ב־10% בכל שעה.

א. כמה חיידקים יהיו בתרבית א אחרי 3 שעות?

ב. כמה חיידקים יהיו בתרבית ב אחרי 3 שעות?

ג. אחרי כמה שעות שלמות יהיו לראשונה יותר חיידקים בתרבית א מאשר בתרבית ב?

ד. בתרבית א יש בשלב מסוים 1,036.8 חיידקים. כמה שעות עברו מההתחלה?

סעיף א

$$M_3 = 500 \cdot 1.2^3$$

$$M_3 = 500 \cdot 1.728 = 864$$

תשובה: 864

סעיף ב

$$M_3 = 2{,}000 \cdot 0.9^3$$

$$M_3 = 2{,}000 \cdot 0.729 = 1{,}458$$

תשובה: 1,458

סעיף ג

נמשיך את החישוב שעה אחרי שעה:

t	3	4	5
תרבית א	864	1,036.8	1,244.16
תרבית ב	1,458	1,312.2	1,180.98

אחרי 4 שעות עדיין בתרבית ב יותר, ואחרי 5 שעות בתרבית א יותר.

תשובה: אחרי 5 שעות

סעיף ד

$$1{,}036.8 = 500 \cdot 1.2^t$$

$$1.2^t = \frac{1{,}036.8}{500} = 2.0736$$

נבדוק במחשבון: $1.2^4 = 2.0736$

$$t = 4$$

תשובה: 4 שעות

8 שאלה 8 מתקדם

דנה הפקידה 20,000 שקלים בתוכנית חיסכון בריבית שנתית קבועה. אחרי שנתיים היו לה בתוכנית 21,632 שקלים.

א. מהי הריבית השנתית בתוכנית?

ב. כמה כסף יהיה לדנה בתוכנית 5 שנים אחרי ההפקדה?

ג. אחיה של דנה הפקיד סכום כסף באותה תוכנית לפני 3 שנים, והיום יש לו 16,872.96 שקלים. כמה כסף הפקיד?

סעיף א

$$21,632 = 20,000 \cdot q^2$$

$$q^2 = \frac{21,632}{20,000} = 1.0816$$

$$q = \sqrt{1.0816} = 1.04$$

$$p = 4$$

תשובה: 4%

סעיף ב

$$M_5 = 20,000 \cdot 1.04^5$$

$$M_5 \approx 20,000 \cdot 1.2166529$$

$$M_5 \approx 24,333.06$$

תשובה: כ־24,333.06 שקלים

סעיף ג

$$M_t = M_0 \cdot q^t$$

נציב $M_3 = 16,872.96 \, , \, q = 1.04 \, , \, t = 3$:

$$16,872.96 = M_0 \cdot 1.04^3$$

$$16,872.96 = M_0 \cdot 1.124864$$

$$M_0 = \frac{16,872.96}{1.124864} = 15,000$$

תשובה: 15,000 שקלים

9 שאלה 9 מתקדם

ערך של מכונית יורד בכל שנה באותו אחוז. שנה אחרי הקנייה ערכה היה 102,000 שקלים, ושלוש שנים אחרי הקנייה ערכה היה 73,695 שקלים.

א. מצאו את גורם הדעיכה q.

ב. בכמה אחוזים יורד ערך המכונית בכל שנה?

ג. מה היה מחיר המכונית ביום הקנייה?

ד. אחרי כמה שנים שלמות יהיה ערך המכונית לראשונה פחות מחצי ממחיר הקנייה?

סעיף א

בין שנה 1 לשנה 3 עברו 2 שנים:

$$73,695 = 102,000 \cdot q^2$$

$$q^2 = \frac{73,695}{102,000} = 0.7225$$

$$q = \sqrt{0.7225} = 0.85$$

תשובה: $q = 0.85$

סעיף ב

$$0.85 = 1 - \frac{p}{100}$$

$$p = 15$$

תשובה: ב־15%

סעיף ג

$$102{,}000 = M_0 \cdot 0.85$$

$$M_0 = \frac{102{,}000}{0.85} = 120{,}000$$

תשובה: **120,000 שקלים**

סעיף ד

חצי ממחיר הקנייה: 60,000 שקלים. נציב $M_t = 120{,}000 \cdot 0.85^t$:

t	4	5
M_t	≈ 62,640.75	≈ 53,244.64

אחרי 4 שנים הערך עוד מעל 60,000 , ואחרי 5 שנים כבר מתחת.

תשובה: **אחרי 5 שנים**