

חוברת הקורס – אינדוקציה

הוכחת נוסחת סכום · מכפלה · התחלקות · סדרות · הוכחה תקינה או שגויה · שאלות בגרות

5 יחידות · שאלון 571 · עם פתרונות סופיים

הסברים מלאים של כל התרגילים באתר – לחצו על "סרטון שיעור" ליד כל תרגיל

מתמטריק
ללמוד ולהצליח

כל הזכויות שמורות - מתמטריק

בחוברת כל 41 התרגילים של הקורס: 20 תרגילים לפי נושאים, 17 שאלות אינדוקציה מבחינות הבגרות בשאלון 571 (2021-2026), מהחדשה לישנה, 3 שאלות מבגרויות הניסוי (שאלון 035581), ובסוף תרגול נוסף – שאלה שיש בה גם סדרות. בכל תרגיל: הנוסח המלא, ומתחתיו הפתרון הסופי של כל סעיף.

פרק 1 – מהי אינדוקציה והוכחת נוסחת סכום

ארבעת השלבים של הוכחה באינדוקציה

1. בסיס: בדיקה בעבור $n = 1$

2. הנחה: נניח שנכון בעבור $n = k$

3. צעד: נוכיח בעבור $n = k + 1$

4. מסקנה: נכון לכל n טבעי

סרטון שיעור 1

1 מהי הוכחה באינדוקציה

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

סעיף א פתרון סופי: הוכחה – ארבעת השלבים ✓

סרטון שיעור 2

2 סכום המספרים האי-זוגיים

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

סעיף א פתרון סופי: הוכחה ✓

סרטון שיעור 3

3 סכום חזקות של 2

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

סעיף א פתרון סופי: הוכחה ✓

סרטון שיעור 4

4 סכום מכפלות של מספרים עוקבים

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

סעיף א פתרון סופי: הוכחה ✓

סרטון שיעור 5

5 מציאת פרמטר והוכחה

נתון כי השוויון

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) = \frac{n(3n+a)}{2}$$

מתקיים בעבור $n = 2$. a הוא פרמטר.

א. מצאו את a .

ב. הציבו את הערך של a שמצאתם והוכיחו באינדוקציה כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

סעיף א פתרון סופי: $a = -1$ ✓

סעיף ב פתרון סופי: הוכחה ✓

סרטון שיעור 6

6 סכום על המספרים הזוגיים

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$2^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

סעיף א פתרון סופי: הוכחה ✓

פרק 2 – הוכחת נוסחה למכפלה

סרטון שיעור 7

7 מכפלת חזקות של 2

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

סעיף א פתרון סופי: הוכחה ✓

8 סרטון שיעור

8 מכפלה של שברים

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \dots$$

$$\dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$$

סעיף א פתרון סופי: הוכחה 

9 סרטון שיעור

9 מכפלה עם הפרש ריבועים

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \dots$$

$$\dots \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$= \frac{n+2}{2(n+1)}$$

סעיף א פתרון סופי: הוכחה 

פרק 3 - התחלקות

10 סרטון שיעור

10 הביטוי $n^2 + n$ מתחלק ב-2

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $n^2 + n$ מתחלק ב-2 ללא שארית.

סעיף א פתרון סופי: הוכחה 

11 סרטון שיעור

11 הביטוי 7 בחזקת n פחות 1 מתחלק ב-6

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $7^n - 1$ מתחלק ב-6 ללא שארית.

סעיף א פתרון סופי: הוכחה 

12 סרטון שיעור

12 הביטוי 3 בחזקת n פחות 1 מתחלק ב-8

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $3^{2n} - 1$ מתחלק ב-8 ללא שארית.

סעיף א פתרון סופי: הוכחה 

13 סרטון שיעור

13 הביטוי $n^3 + 2n$ מתחלק ב-3

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי הביטוי $n^3 + 2n$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

פרק 4 – סדרות: כלל נסיגה ונוסחה לפי מקום

14 סרטון שיעור

14 כלל נסיגה של סדרה חשבונית

סדרה מוגדרת על ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = a_n + 4, a_1 = 3$.
הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $a_n = 4n - 1$.

סעיף א פתרון סופי: הוכחה ✓

15 סרטון שיעור

15 כלל נסיגה של סדרה הנדסית

סדרה מוגדרת על ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = 3a_n, a_1 = 2$.
הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

סעיף א פתרון סופי: הוכחה ✓

16 סרטון שיעור

16 שתי הצגות של אותה סדרה

נתונות שתי סדרות: $a_n = n^2 + 2n$, והסדרה b_n המוגדרת על ידי $b_1 = 3, b_{n+1} = b_n + 2n + 3$.
הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $a_n = b_n$.

סעיף א פתרון סופי: הוכחה ✓

17 סרטון שיעור

17 כלל נסיגה שאינו חשבוני ואינו הנדסי

סדרה מוגדרת על ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = 2a_n + 1, a_1 = 1$.
א. חשבו את a_2, a_3, a_4 .
ב. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $a_n = 2^n - 1$.

סעיף א פתרון סופי: 3, 7, 15 ✓

סעיף ב פתרון סופי: הוכחה ✓

18 צעד בלי בסיס

סרטון שיעור 18

לפניכם טענה: לכל n טבעי מתקיים

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

- א. הוכיחו: אם הטענה נכונה בעבור $n = k$, כאשר k טבעי כלשהו, אז היא נכונה גם בעבור $n = k + 1$.
- ב. האם הטענה נכונה לכל n טבעי? נמקו.

✓ סעיף א פתרון סופי: הצעד מתקיים

✓ סעיף ב פתרון סופי: לא נכונה – אין בסיס

19 דוגמאות אינן הוכחה

סרטון שיעור 19

נתונות שתי סדרות: $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n$ וגם $b_1 = 2, b_{n+1} = b_n + 2n$.

- א. חשבו את ארבעת האיברים הראשונים בכל סדרה.
- ב. דני אמר: "שלושת האיברים הראשונים שווים, ולכן $a_n = b_n$ לכל n טבעי". האם דני צודק? נמקו.

✓ סעיף א פתרון סופי: $a: 2, 4, 8, 16; b: 2, 4, 8, 14$ ✓ סעיף ב פתרון סופי: לא – $a_4 \neq b_4$

20 לאיזה מספר הבסיס מתקיים

סרטון שיעור 20

לפניכם טענה, כאשר c הוא מספר קבוע: לכל n טבעי מתקיים

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + c$$

- א. הוכיחו ששלב הצעד מתקיים לכל ערך של c .
- ב. בעבור איזה ערך של c הטענה נכונה לכל n טבעי? נמקו.

✓ סעיף א פתרון סופי: הצעד מתקיים לכל c ✓ סעיף ב פתרון סופי: $c = 0$

סרטון שיעור 21

21 סכום חזקות שלישיות - מציאת פרמטר והוכחה

בגרות קיץ 2026 מועד ב', שאלה 1 סעיף א

17

נתון כי השוויון

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{b}$$

מתקיים בעבור $b \cdot n = 2$ הוא פרמטר שונה מ-0.(1) מצאו את הערך של b .(2) הציבו $b = 4$ והוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי השוויון הנתון מתקיים לכל n טבעי.✓ סעיף א (1) פתרון סופי: $b = 4$

✓ סעיף א (2) פתרון סופי: הוכחה

סרטון שיעור 22

22 סכום שברים

בגרות קיץ 2026 מועד א', שאלה 1 סעיף א

17

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

✓ סעיף א פתרון סופי: הוכחה

סרטון שיעור 23

23 סכום עם חזקות של 3

בגרות קיץ 2025 מועד ב', שאלה 1 סעיף א

17

הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \dots + \frac{4n-2}{3^n} = 2 - \frac{2n+2}{3^n}$$

✓ סעיף א פתרון סופי: הוכחה

(1) הוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

(2) חשבו את הערך של הסכום: $4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + 100^2$.

✓ סעיף א (1) פתרון סופי: הוכחה

✓ סעיף א (2) פתרון סופי: 171696

נתון השוויון:

$$8 + 24 + 48 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+a)(n+4)}{6}$$

עבור n טבעי זוגי. a הוא פרמטר.

(1) מצאו את הערך של a .

(2) בעבור הערך של a שמצאתם, הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי השוויון הנתון מתקיים לכל n טבעי זוגי.

✓ סעיף א (1) פתרון סופי: $a = 2$

✓ סעיף א (2) פתרון סופי: הוכחה

(1) הוכיחו באינדוקציה מתמטית או בדרך אחרת כי השוויון שלפניכם מתקיים בעבור כל n טבעי.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(2) האם הביטוי $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)$ שווה ל- $\frac{n+1}{n}$ בעבור כל n טבעי? נמקו את תשובתכם.

✓ סעיף א (1) פתרון סופי: הוכחה

✓ סעיף א (2) פתרון סופי: לא ($n = 2$)

הוכיחו באינדוקציה מתמטית או בדרך אחרת כי השוויון שלפניכם מתקיים בעבור כל n טבעי:

$$4 + 13 + \dots + \frac{5n^2 + 3n}{2} = \frac{n(n+1)(5n+7)}{6}$$

סעיף א פתרון סופי: הוכחה ✓

הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת שלכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$48 + 144 + 288 + \dots + 6n(n+2) = n(n+2)(n+4)$$

סעיף א פתרון סופי: הוכחה ✓

בעבור כל n טבעי הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת כי מתקיים:

$$\frac{A}{2} + \frac{A}{2^2} + \dots + \frac{A}{2^n} = A(1 - \frac{1}{2^n})$$

A הוא פרמטר.

סעיף א פתרון סופי: הוכחה ✓

נתונות שתי סדרות המוגדרות לכל n טבעי: $b_n = 2^n, a_n = 2n - 1$.

נסמן: $T_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$.

(1) הוכיחו כי: אם בעבור k טבעי כלשהו מתקיים $T_k = (2k - 3) \cdot 2^{k+1}$, אז מתקיים $T_{k+1} = (2k - 1) \cdot 2^{k+2}$.

לפניכם טענה: לכל n טבעי מתקיים $T_n = (2n - 3) \cdot 2^{n+1}$.

(2) הסבירו מדוע טענה זו אינה נכונה.

סעיף א (1) פתרון סופי: הוכחה (שלב הצעד) ✓

סעיף א (2) פתרון סופי: לא נכונה - הבסיס לא מתקיים ✓

בעבור כל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 2 + 4 \cdot 7 + \dots$$

$$+ (3n - 2)(5n - 3)$$

$$= n(5n^2 - 2n - 1)$$

$$(1) \text{ חשבו את הסכום: } 7 \cdot 12 + 10 \cdot 17 + \dots + 58 \cdot 97$$

(2) נתון:

$$1 \cdot 2 + 4 \cdot 7 + \dots$$

$$+ (3n - 2)(5n - 3)$$

$$+ (3n + 1)(5n + 2)$$

$$= (n + 1)(5n^2 + 8n + C)$$

מצאו את C . נמקו.

סעיף א (1) פתרון סופי: 39150 ✓

סעיף א (2) פתרון סופי: $C = 2$ ✓

הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי בעבור כל n טבעי מתקיים:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$= \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$$

סעיף א פתרון סופי: הוכחה ✓

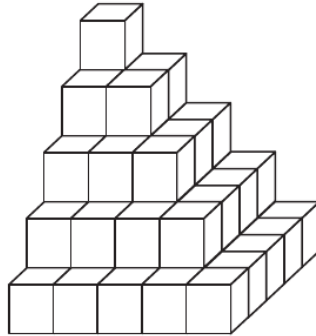
(1) בעבור כל n טבעי, הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת כי הביטוי $4^n - 1$ מתחלק ב-3 ללא שארית.

(2) נתון: p הוא מספר שלם. כתבו דוגמה לערך של p שבעבורו הביטוי $4^{n+1} + p$ מתחלק ב-12 ללא שארית, לכל n טבעי.

סעיף א (1) פתרון סופי: הוכחה ✓

סעיף א (2) פתרון סופי: $p = 8$ (דוגמה) ✓

נתון מגדל קוביות ובו 5 קומות (ראו ציור). הקומה התחתונה בנויה מ-25 קוביות המסודרות בצורת ריבוע. הקומה שמעליה בנויה מ-16 קוביות המסודרות בצורת ריבוע, וכך הלאה עד לקומה העליונה שבה יש קובייה אחת.



- (1) כמה קוביות סך הכול דרושות כדי לבנות באותו אופן מגדל שבו 7 קומות?
 (2) נתון מגדל ובו 10 קומות הבנוי באותו אופן. כמה קוביות צריך להוסיף למגדל זה, כדי שיהיו בו 100 קומות הבנויות באותו אופן?

אפשר להיעזר בנוסחה (לכל n טבעי):

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

✓ סעיף ב (1) פתרון סופי: 140 קוביות

✓ סעיף ב (2) פתרון סופי: 337965 קוביות

- (1) הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \dots$$

$$\dots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1$$

- (2) חשבו את המכפלה:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \dots$$

$$\dots \cdot \left(1 + \frac{1}{99}\right)$$

✓ סעיף ב (1) פתרון סופי: הוכחה

✓ סעיף ב (2) פתרון סופי: 50

בחוברת לימוד ישנה ומוכתמת נמצא התרגיל הבא:

הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים השוויון הבא:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + \dots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{(2n-1)3^n}{4} + \frac{1}{4}$$

אחד המספרים באגף ימין של התרגיל נמחק (סומן כאן $\square$).

(1) מצאו את המספר שנמחק.

(2) הציבו את המספר שמצאתם והוכיחו באינדוקציה, או בדרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

✓ סעיף ב (1) פתרון סופי: 1

✓ סעיף ב (2) פתרון סופי: הוכחה

לפניך שתי טענות. קבע איזו מהן נכונה לכל n טבעי, והוכח אותה באינדוקציה.

$$\begin{aligned} \text{I. } & \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2n+4} \\ \text{II. } & \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{3(n+1)} \end{aligned}$$

✓ בחירה פתרון סופי: טענה I נכונה, II לא

✓ הוכחה פתרון סופי: הוכחה

פרק 7 - בגריות ניסוי 2021-2020 (שאלון 035581)

הוכח באינדוקציה או בכל דרך אחרת שהביטוי $5^n - 1$ מתחלק ב-4 ללא שארית לכל n טבעי.

✓ סעיף א פתרון סופי: הוכחה

הוכח באינדוקציה או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

סעיף ב פתרון סופי: הוכחה

הוכח באינדוקציה או בכל דרך אחרת שהביטוי $n^3 - n$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

סעיף ב פתרון סופי: הוכחה

פרק 8 - תרגול נוסף

שאלה שיש בה גם סעיפים על סדרות. בקורס פותרים בה את סעיף האינדוקציה, והפתרון של סעיפי הסדרות נמצא בפתרון הבגרות המלא.

שימו לב: בשאלה זו יש גם סעיפים על סדרות.

a_n היא סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה מתכנס. המנה של הסדרה היא q . נסמן ב- T את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים בסדרה, ונסמן ב- R את סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה. נתון: $\frac{T^2}{R^2} = 16$.

א. מצאו את הערך של q .

נתונה סדרה b_n שאיבריה מקיימים $b_n = \frac{1+q}{a_n \cdot a_{n+1}}$ לכל n טבעי. נתון: $b_1 = 1$.

ב. מצאו את הערך של a_1 .

ג. הביעו את b_n באמצעות n .

ד. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{16^n - 1}{15}$$

כאן פותרים את סעיף ד. בסעיף ג מצאנו: $b_n = 16^{n-1}$ (הפתרון של סעיפים א-ג בקישור בסוף).

סעיף א פתרון סופי: $q = \frac{1}{4}$ ✓

סעיף ב פתרון סופי: $a_1 = \sqrt{5}$ ✓

סעיף ג פתרון סופי: $b_n = 16^{n-1}$ ✓

דרך א פתרון סופי: הוכחה ✓

דרך ב פתרון סופי: הוכחה ✓