

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

תוכנית חדשה

הוראות

א. משך הבחינה: שעתיים וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
יש לענות על שלוש שאלות, על שאלה אחת לפחות מכל פרק – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.
יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

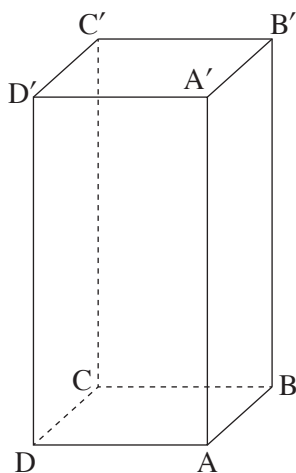
בהצלחה!

השאלות

ענו על שלוש מן השאלות 1-5, על שאלה אחת לפחות מכל פרק (לכל שאלה – $\frac{1}{3}$ נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתונה פרבולה שמשוואתה $y^2 = 54x$.
 בנקודה A, שנמצאת על הפרבולה, מעבירים משיק לפרבולה ששיפועו $\frac{3}{4}$.
 א. מצאו את שיעורי הנקודה A.
 הנקודה A נמצאת על מעגל שמרכזו בנקודה M.
 נתון כי המשיק לפרבולה הוא גם משיק למעגל בנקודה A,
 וכי ציר ה- y משיק למעגל כך ששיעור ה- x של הנקודה M קטן משיעור ה- x של הנקודה A.
 ב. (1) מצאו את משוואת הישר AM.
 (2) מצאו את משוואת המעגל.
 נקודה B היא נקודה כלשהי על המעגל. דרך נקודה B מעבירים משיק למעגל.
 נקודה P נמצאת על המשיק כך ש- $BP = 36$.
 ג. (1) מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות P המתקבלות באופן זה.
 (2) האם על המקום הגאומטרי שמצאתם יש שתי נקודות שהמרחק ביניהן הוא 80? נמקו את תשובתכם.



2. בסרטוט שלפניכם תיבה $ABCD A' B' C' D'$.

נסמן: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$.

הנקודה E היא אמצע המקצוע BB' .

א. הביעו את $\overrightarrow{EA}$ ו- $\overrightarrow{EC}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

הנקודה M מקיימת $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{6}\underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{12}\underline{w}$.

ב. הביעו את $\overrightarrow{EM}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

נתון: $\overrightarrow{EM} = a \cdot \overrightarrow{EA} + b \cdot \overrightarrow{EC}$.

a ו- b הם פרמטרים.

ג. (1) מצאו את הערך של a ואת הערך של b.

(2) האם הנקודה M נמצאת במישור AEC? נמקו את תשובתכם.

נתון כי $|\underline{w}| = 4$ והווקטור $\overrightarrow{BM}$ מאונך למישור AEC.

ד. מצאו את הערך של $|\underline{u}|$ ואת הערך של $|\underline{v}|$.

ה. חשבו את המרחק בין הנקודה B ובין המישור AEC.

3. נתונה המשוואה $z^3 = -64$.

z הוא משתנה מרוכב.

א. מצאו את כל פתרונות המשוואה.

נתונים שני מספרים מרוכבים:

$$w_1 = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha), \quad w_2 = 2r \cdot (\cos 4\alpha + i \cdot \sin 4\alpha)$$

$$50^\circ < \alpha < 130^\circ$$

שתי הנקודות המיוצגות על ידי המספרים w_1 ו- w_2 נמצאות על ישר אחד, שעובר דרך ראשית הצירים O במישור גאוס.

ב. מצאו את שני הערכים האפשריים של α .

נתון כי w_1 הוא אחד מן הפתרונות שמצאתם בסעיף א.

ג. מצאו את הערך של α ואת הערך של r .

נתונים שני מספרים מרוכבים נוספים: $w_3 = 4 \cdot i$, $w_4 = \frac{8}{i}$.

ABCD הוא מרובע קמור. הקודקוד A מיוצג על ידי המספר w_1 , הקודקוד B מיוצג על ידי המספר w_3 ,

הקודקוד C מיוצג על ידי המספר w_2 , והקודקוד D מיוצג על ידי המספר w_4 .

ד. הראו כי שטח המרובע ABCD הוא 36.

u הוא מספר מרוכב. הנקודה E, שמיוצגת על ידי המספר u , נמצאת ברביע הראשון על חוצה הזווית BOA.

נתון כי $\left| u \right| > 1$, $\bar{u} + \frac{1}{u} = 5.2 \cdot (\cos 285^\circ + i \cdot \sin 285^\circ)$.

ה. מצאו את המספר המרוכב u .

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקצייה $f(x) = x^n \cdot (3 - \ln x)$, המוגדרת בתחום $x > 0$.

n הוא פרמטר טבעי.

א. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x .

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 1$ הוא 2.

ב. מצאו את הערך של n .

הציבו $n = 1$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג-ו.

ג. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

ה. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

a הוא פרמטר, $1 < a < 3$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = e$ ו- $x = e^a$ הוא $\ln 10$.

ו. מצאו את הערך של a .

5. נתונה הפונקצייה $f(x) = 4e^x - x + 9 \cdot \ln(4 - e^x)$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. הראו כי $f'(x) = \frac{-4(e^x - 1)^2}{4 - e^x}$.

ג. (1) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(2) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ המקביל לציר ה- x .

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ה. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד. סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $x < \ln 4$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = f(x) + ax$, שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

a הוא פרמטר.

ו. היעזרו בגרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ומצאו בעבור אילו ערכים של a יש לפונקצייה $g(x)$ שתי נקודות קיצון.

נמקו את תשובתכם.

בהצלחה