

תוכנית חדשה

מתמטיקה 5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
יש לענות על שלוש שאלות לבחירתכם – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
- (2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה — $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתונים הישרים שמשוואותיהם: $\ell_1: 4y - 3x - 20 = 0$,

$\ell_2: x = -4$.

א. מצאו את המשוואות המתארות את המקום הגאומטרי

של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מן הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 .

מעגל שמרכזו M משיק לישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 .

המעגל משיק לישר ℓ_1 בנקודה A שבה $x = 4$.

המרכז M נמצא ברביע הראשון (ראו סרטוט).

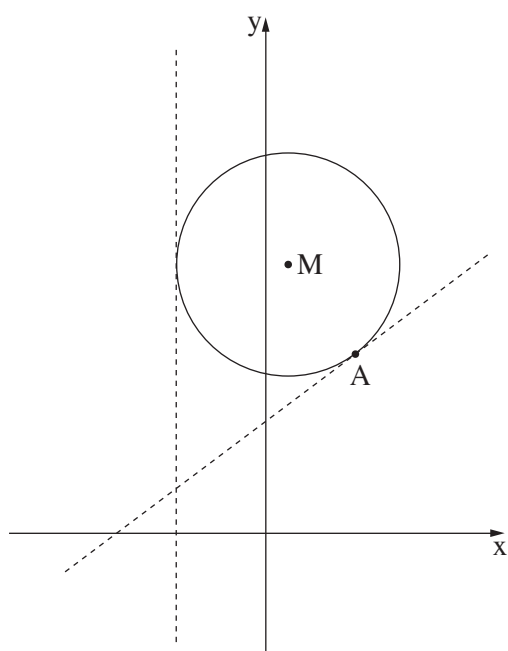
ב. מצאו את שיעורי הנקודה M.

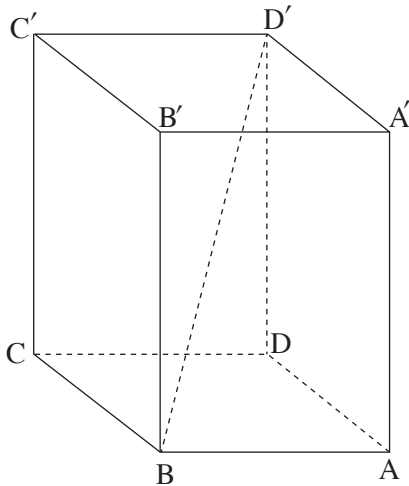
הישר ℓ_2 הוא מדריך של פרבולה קנונית.

ג. האם הישר ℓ_1 משיק בנקודה A לפרבולה זו? נמקו את תשובתכם.

ד. מצאו את משוואת המעגל המשיק לפרבולה זו בשתי נקודות

שאחת מהן היא הנקודה A.





2. נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ שהבסיס שלה, $ABCD$, הוא מלבן (ראו סרטוט).

הנקודה E נמצאת על המקצוע DD' כך ש- $DE : ED' = 3 : 2$,

הנקודה F נמצאת על האלכסון BD' ומתקיים: $\overrightarrow{BF} = t \cdot \overrightarrow{BD'}$,

$0 < t < 1$ הוא פרמטר.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{BD'}$ ו- $\overrightarrow{FE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- t , אם יש צורך.

נתון כי FE מקביל למישור הבסיס $ABCD$.

ב. מצאו את t .

הנקודה C היא ראשית הצירים.

הנקודה B נמצאת על ציר ה- x בכיוון החיובי שלו, והנקודה D נמצאת על ציר ה- y בכיוון החיובי שלו.

נתון: $F(4, 9, 12)$.

ג. מצאו את $|\underline{u}|$, $|\underline{v}|$, $|\underline{w}|$.

מן הנקודה F העבירו ישר המאונך למישור $EFBD$.

ישר זה חותך את הפאה $CDD'C'$ בנקודה P .

ד. מצאו את שיעורי הנקודה P .

3. $z = x + iy$ הוא מספר מרוכב (x ו- y הם מספרים ממשיים).

א. (1) הראו כי משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות במישור גאוס המקיימות: $|z^2 - i| = |z^2 + 3i|$,

היא $y = -\frac{1}{2x}$.

(2) תנו דוגמה למספר מרוכב הנמצא על המקום הגאומטרי הזה.

ב. פתרו את המשוואה: $z^6 = 1$.

פתרונות המשוואה שמצאתם בסעיף ב מייצגים את קודקודיו של מצולע I .

המקום הגאומטרי שמצוין בתת-סעיף א (1) חותך ברביע הרביעי את המעגל החוסם את מצולע I בנקודה A .

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A .

הנקודה A היא קודקוד של מצולע משוכלל אחר החסום באותו מעגל, מצולע II .

נתון: מספר הקודקודים של מצולע II שווה למספר הקודקודים של מצולע I .

ד. מצאו את המספרים המרוכבים המייצגים את כל הקודקודים של מצולע II .

נסמן: $w = r \cdot \text{cis } \alpha$, $0 < \alpha < 60^\circ$.

כופלים את כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע I במספר w , כך שקודקודי מצולע I מתלכדים עם

קודקודי מצולע II .

ה. מצאו את w .

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. $f(x)$ היא פונקציית המוגדרת לכל x , ו- $f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת שלה, המוגדרת גם היא לכל x .

נתון: $f'(x) = -2x \cdot e^{-\frac{x^2}{a}}$, a הוא פרמטר.

לפונקציית $f(x)$ יש נקודת פיתול בנקודה שבה $x = \sqrt{2}$.

א. מצאו את a .

נתון: $f(0) = a$.

ב. מצאו את הפונקציית $f(x)$.

ג. (1) האם הפונקציית $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציית $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציית $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציית $f(x)$.

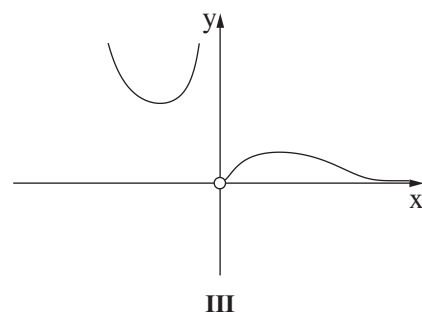
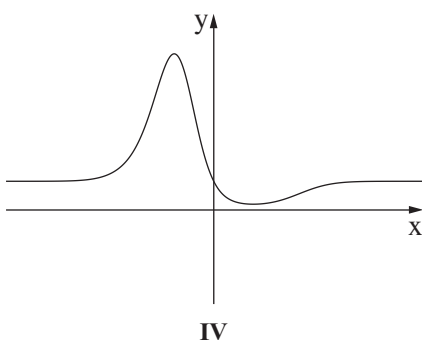
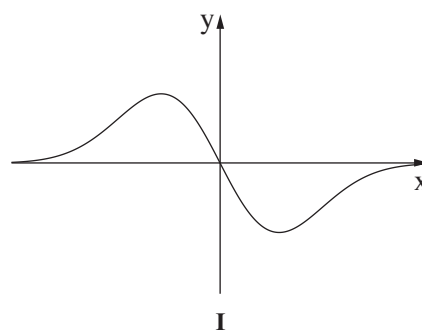
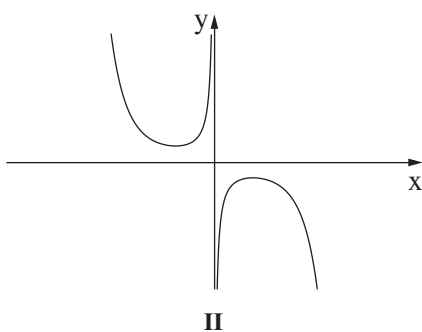
נתונות הפונקציות $m(x) = e^{h(x)}$, $h(x) = \frac{1}{f'(x)}$.

שלושה מבין הגרפים IV-I שבסוף השאלה מתארים את הפונקציות $m(x)$, $h(x)$, $f'(x)$.

ד. התאימו לכל פונקציית את הגרף המתאר אותה.

ה. (1) מצאו את תחומי הירידה של הפונקציית $m(x)$.

(2) קבעו אם הביטוי $\int_1^2 h(x) \cdot m(x) dx$ חיובי או שלילי. נמקו את קביעתכם.



5. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{1 - \ln x}{\ln x}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.
 (3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \ln(-f(x))$.

- ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.
 (3) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $g(x)$.
 (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

נסמן ב- a את שיעור ה- x של נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ וגרף הפונקצייה $g(x)$.

ג. מבין הביטויים I–III קבעו איזה ביטוי הוא הגדול ביותר ואיזה ביטוי הוא הקטן ביותר (אין צורך למצוא את הערך של a). נמקו את תשובתכם.

$$\text{I. } \int_{a+1}^{a+2} (g(x) - f(x)) dx \quad \text{II. } \int_{a+3}^{a+4} (g(x) - f(x)) dx \quad \text{III. המספר 1}$$

בהצלחה!