

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

תוכנית חדשה

הוראות

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – "שאלות קצרות", סדרות והסתברות

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות לבחירתכם – $20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים

בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

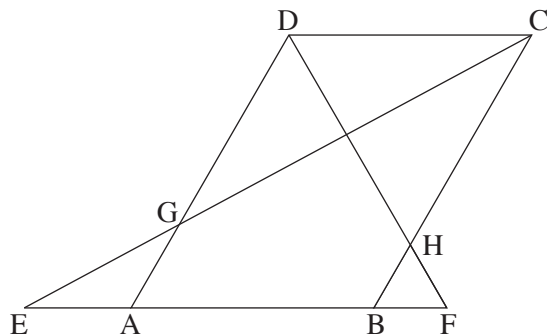
השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – "שאלות קצרות", סדרות והסתברות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.



א. בסרטוט שלפניכם מקבילית ABCD.

הנקודות E ו-F נמצאות על המשכי הצלע AB, כמתואר בסרטוט.

הקטע EC חותך את הצלע AD בנקודה G.

הקטע FD חותך את הצלע BC בנקודה H.

נתון: $GE = 5$, $HF = 4$.

(1) מצאו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את משולש HBF

ובין רדיוס המעגל החוסם את משולש GEA.

נמקו את תשובתכם.

נתון: המרובע ABHD הוא בר־חסימה במעגל,

$BH = FH$.

(2) הוכיחו כי המשולש HBF הוא שווה צלעות.

ב. ביישוב מסוים ההסתברות לבחור באקראי גבר היא 0.2, וההסתברות לבחור באקראי אישה היא 0.8.

בוחרים באקראי 4 אנשים מיישוב זה.

לפניכם שני ביטויים:

ביטוי 1: $1 - 0.2^4 - 0.8^4$

ביטוי 2: $\binom{4}{3} \cdot 0.2^3 \cdot 0.8 + 0.2^4$

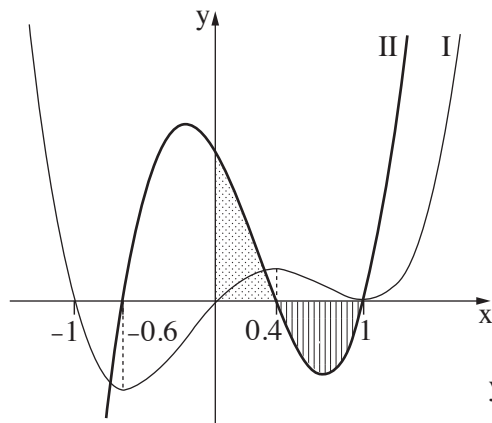
קבעו איזו מן ההסתברויות I–III שלפניכם אפשר לחשב על ידי ביטוי 1 ואיזו מהן אפשר לחשב על ידי ביטוי 2.

I. ההסתברות לבחור באקראי יותר גברים מנשים.

II. ההסתברות לבחור באקראי יותר נשים מגברים.

III. ההסתברות לבחור באקראי לפחות גבר אחד ולפחות אישה אחת.

ג. $f(x)$ היא פונקצייה.



בסרטוט שלפניכם מוצגים שני גרפים: גרף I וגרף II.

אחד הגרפים הוא של פונקציית הנגזרת $f'(x)$,

והגרף האחר הוא הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$.

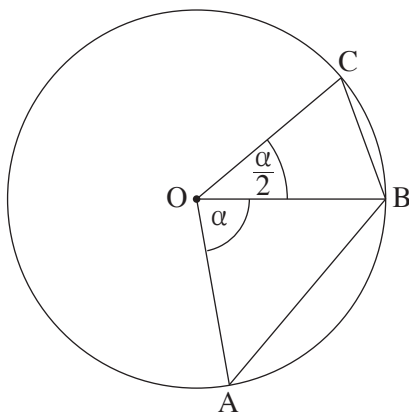
(1) איזה גרף הוא של $f'(x)$, ואיזה גרף הוא של $f''(x)$? נמקו.

(2) הוכיחו שהשטח המוגבל על ידי גרף II ועל ידי ציר ה- x

ברביע הרביעי (השטח המקווקו בסרטוט)

שווה לשטח המוגבל על ידי גרף II, על ידי ציר ה- x ועל ידי ציר ה- y

ברביע הראשון (השטח המנוקד בסרטוט).



ד. במעגל שמרכזו O בונים סדרה אין-סופית של משולשים שווי שוקיים.

זוויות הראש של המשולשים הן זוויות מרכזיות במעגל,

ושוקי המשולשים הם רדיוסים במעגל.

זווית הראש של המשולש הראשון ($\triangle AOB$) היא α .

זווית הראש של המשולש השני ($\triangle BOC$) היא $\frac{\alpha}{2}$, כמתואר בסרטוט.

ממשיכים לבנות משולשים שווי שוקיים כך שזווית הראש של

כל משולש נוסף בסדרה קטנה פי 2 מזווית הראש של המשולש שלפניו.

נתון: סכום כל זוויות הראש של כל המשולשים בסדרה הוא 240° .

(1) מצאו את α .

(2) האם שטחי כל המשולשים האלה הם סדרה הנדסית? נמקו את תשובתכם.

2. נתונה סדרה חשבונית A ובה $2n$ איברים (n הוא מספר טבעי).

d הוא הפרש הסדרה ($d \neq 0$).

מגדירים סדרה נוספת B באופן הזה: $b_m = \frac{a_m + a_{m+1}}{2}$.

בסדרה B יש $2n - 1$ איברים.

א. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה חשבונית, והביעו באמצעות d את ההפרש שלה.

נסמן ב- S_A את סכום האיברים בסדרה A .

נסמן ב- S_B את סכום האיברים בסדרה B .

ב. הוכיחו: $\frac{S_A}{2n} = \frac{S_B}{2n-1}$.

נתון: $S_A = 220 + S_B$, $S_A = \frac{66}{65} \cdot S_B$.

ג. (1) מצאו את n .

(2) מצאו את סכום שני האיברים האמצעיים בסדרה A .

3. כדי להתקבל ללימודים בפקולטה מסוימת מועמד צריך להיבחן בשני מבחנים.

ההסתברות שמועמד יצליח במבחן הראשון היא P ($P > 0.5$).

אם המועמד הצליח במבחן הראשון, אז ההסתברות שהוא יצליח במבחן השני היא $P + 0.3$.

אם המועמד נכשל במבחן הראשון, אז ההסתברות שהוא יצליח במבחן השני היא $P - 0.1$.

נתון כי ההסתברות שהמועמד יצליח בדיוק במבחן אחד מבין השניים היא $\frac{9}{40}$.

א. מצאו את P .

כדי להתקבל ללימודים בפקולטה המועמד צריך להצליח בשני המבחנים.

ב. ידוע כי מועמד הצליח לפחות במבחן אחד. מהי ההסתברות שהוא התקבל לפקולטה?

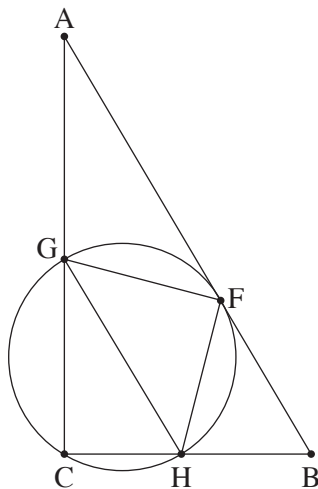
שלושה מועמדים נבחנו בשני המבחנים.

ג. מהי ההסתברות ששני מועמדים מבין השלושה התקבלו לפקולטה ואחד מהם נכשל בשני המבחנים?

n מועמדים נבחנו בשני המבחנים ($n \geq 2$).

ד. הביעו באמצעות n את ההסתברות שלפחות מועמד אחד התקבל לפקולטה וגם לפחות מועמד אחד לא התקבל לפקולטה.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. המשולש ABC הוא משולש ישר זווית, $\angle ACB = 90^\circ$.

הנקודות F, G, H, נמצאות על הצלעות AB, AC, CB בהתאמה, כך שהמרובע GCHF חסום במעגל (ראו סרטוט).

נתון: AB משיק למעגל בנקודה F,

$AB \parallel GH$.

א. הוכיחו: $FG = FH$.

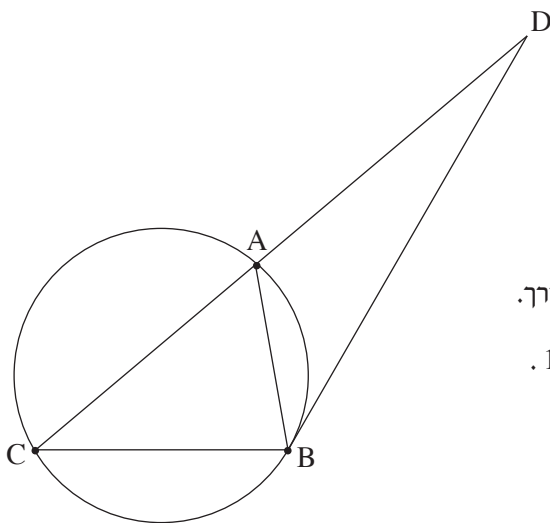
ב. (1) מצאו את גודל הזווית $\angle ACF$.

(2) הוכיחו: $\triangle GFC \sim \triangle FBC$.

קוטר המעגל היוצא מנקודה F חותך את הצלע AC

בנקודה E.

ג. הוכיחו: $\angle FEB = \angle FCB$.



5. המשולש ABC חסום במעגל שהרדיוס שלו הוא R.

המשיק למעגל בנקודה B חותך את המשך הצלע CA

בנקודה D, כמתואר בסרטוט.

נסמן: $\angle ABD = \alpha$.

נתון: $\angle DBC = 120^\circ$.

א. הביעו את אורכי הצלעות AB ו-BC באמצעות R ו- α , אם יש צורך.

נתון: היחס בין שטח המשולש BDC ובין שטח המשולש BDA הוא 1.8.

ב. מצאו את α .

נתון כי רדיוס המעגל החסום במשולש BDA הוא 4.

ג. מצאו את R.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \sin(x) \cdot \cos^3(x)$ המוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

- א. (1) האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמקו.
 (2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.
 (3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
 (4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

- ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.
 (2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$.
 (3) סרטטו (בכוון מקווקו) סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$ באותה מערכת צירים שבה סרטטתם את גרף הפונקצייה $f(x)$.

ענו על סעיף ג בעבור התחום שבו מוגדרות שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.
 ג. מצאו את המרחק המינימלי בין הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

7. נתונה הפונקצייה $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$.

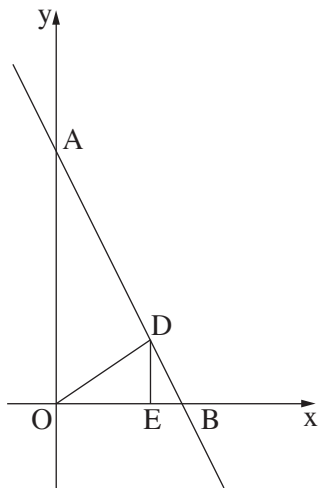
- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x (אם יש כאלה).
 (3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.
 (4) מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה ($\cup$) וכלפי מטה ($\cap$) של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x) = -f(-x)$. הפונקציות $f(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו תחום.
 ג. באותה מערכת צירים שבה סרטטתם סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$, הוסיפו בקו מקווקו סקיצה של גרף הפונקצייה $h(x)$.

נתון: $a > 4$ הוא פרמטר.

7. סדרו את הביטויים **I**, **II**, **III** שלפניכם מן הקטן ביותר אל הגדול ביותר (כתבו בצד שמאל את מספרו של הביטוי הקטן ביותר וכן הלאה).

$$\text{I} \quad \int_a^{a+1} (f(x) - h(x)) dx \quad \text{II} \quad \int_{a+1}^{a+2} (f(x) - h(x)) dx \quad \text{III} \quad \int_{-a+1}^{-a+2} (f(x) - h(x)) dx$$



8. ישר ששיפועו -2 חותך את החלק החיובי של ציר ה- x בנקודה B , ואת החלק החיובי של ציר ה- y בנקודה A . הנקודה D נמצאת על הישר AB ברביע הראשון. הנקודה E נמצאת על ציר ה- x כך שהקטע DE מקביל לציר ה- y . הנקודה O היא ראשית הצירים, כמתואר בסרטוט. נסמן את אורך הקטע OE ב- p . נתון: שטח המשולש OED הוא $\frac{p}{2}$.
 א. הביעו באמצעות p את משוואת הישר AB .
 ב. מצאו את הערך של p שבעבורו היחס בין שטח המשולש OED ובין שטח המשולש ABO הוא מקסימלי.

בהצלחה!