

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – "שאלות קצרות", סדרות והסתברות

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על ארבע שאלות לבחירתך – $25 \times 4 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיקו את השאלה; סמנו את מספרה בלבד.

(2) התחילו כל שאלה בעמוד חדש. רשמו במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבירו את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

שימו לב: הסבירו את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברת.

פרק ראשון – "שאלות קצרות", סדרות והסתברות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות במחברת.

א. בסרטוט שלפניך:

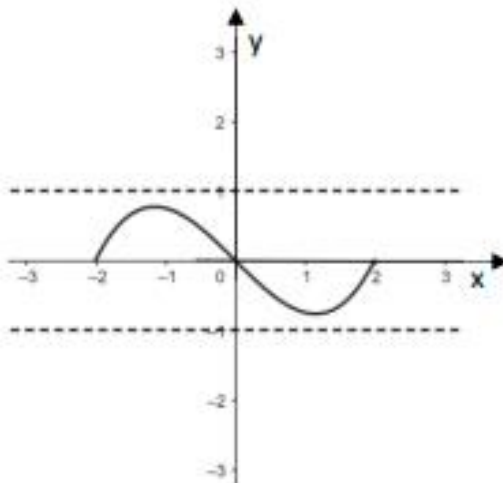
גרף של פונקציה אי-זוגית $f(x)$ בתחום $-2 \leq x \leq 2$

והישרים $y = -1$, $y = 1$.

קבע עבור כל אחת מן הטענות הבאות אם היא נכונה או לא. נמק.

$$\int_0^2 f(x) dx = 0.5 \int_{-2}^2 f(x) dx \quad (1)$$

$$\int_{-2}^0 f(x) dx > \int_0^2 (f(x))^2 dx \quad (2)$$



- ב. נתונה טבלת הסתברויות ובה מידע חלקי:

סה"כ	$\bar{A}$	A	
$2a$		$2a^2 - \frac{1}{8}$	B
			$\bar{B}$
1		a	סה"כ

(1) האם המאורעות A ו- B תלויים זה בזה? נמק.

(2) נתון: $P(A \cap B) = 5P(\bar{A} \cap \bar{B})$. חשב את a .

ג. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2+10x-12}{2x^2-10x+12}$. a הוא פרמטר חיובי.

ציר ה- x והאסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים יוצרים מלבן ששטחו 2.

(1) מהו הערך של הפרמטר a ?

(2) נתונה הפונקציה: $g(x) = f(x+3)$. מהו השטח של המלבן שנוצר על ידי ציר ה- x

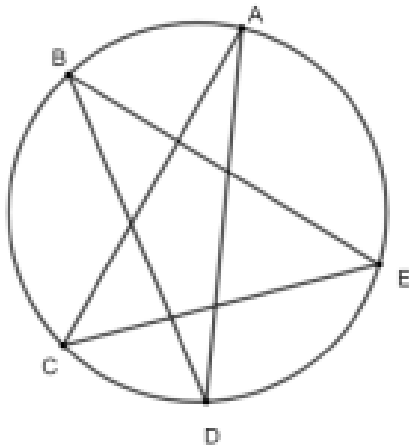
והאסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים! נמק.

ד. במעגל שמרכזו בנקודה O חסום כוכב.

הנקודות E, D, C, B, A הן קודקודי הכוכב (ראה סרטוט).

הוכח שסכום 5 הזוויות של קודקודי הכוכב: $4A + 4B + 4C + 4D + 4E$

הוא 180° .



2. נתונה סדרה הנדסית אינסופית a_n , שאיבריה $a_1, a_2, a_3, \dots$, והמנה שלה q .

א. הבע באמצעות a_1 ו- q את ערכי הסכומים שלפניך.

$$(1) \quad A = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{40}$$

$$(2) \quad B = a_4 + a_8 + a_{12} + \dots + a_{40}$$

נתון כי a_n היא סדרה עולה וכי $\frac{A}{B} = \frac{10}{9}$.

ב. מצא את ערכו של q .

בונים מן הסדרה a_n הנתונה סדרה הנדסית אינסופית b_n המקיימת לכל n טבעי: $b_n = 3 \cdot a_{n+1}$.

ג. מצא את המנה של הסדרה b_n .

בונים סדרה הנדסית אינסופית חדשה: $\dots, \frac{1}{b_4}, \frac{1}{b_3}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1}$.

ד. הבע את הסכום של כל איברי הסדרה החדשה באמצעות a_1 .

נתונה הסדרה: $b_1, a_1, \frac{1}{a_1}$.

ה. (1) האם ייתכן שסדרה זו חשבונית? נמק את תשובתך.

(2) האם ייתכן שסדרה זו הנדסית? נמק את תשובתך.

3. בתחרות ספורט שנערכת בבית ספר משותתפים תלמידים רבים. כל משתתף צריך להצליח לעבור 3 מכשולים בזה אחר זה

לפי הסדר. משתתף שלא מצליח לעבור מכשול מודח מייד מן התחרות. ההסתברות להצליח לעבור מכשול שונה ממכשול

למכשול, אך שווה לכל המשתתפים. משתתף שמצליח לעבור את כל שלושת המכשולים עולה לשלב חצי הגמר.

28% מן המשתתפים בתחרות הצליחו לעבור את שני המכשולים הראשונים. ההסתברות שמשתתף שמצליח לעבור את

שני המכשולים הראשונים יודח מן התחרות גדולה פי 3 מן ההסתברות שהוא יעלה לשלב חצי הגמר.

א. חשב את ההסתברות שמשתתף בתחרות יעלה לשלב חצי הגמר.

ההסתברות שמשתתף יצליח לעבור את המכשול הראשון ולא יעבור את המכשול השני היא 0.42.

ב. חשב את ההסתברות שמשתתף בתחרות לא יצליח לעבור את המכשול הראשון.

ג. בחרו באקראי שלושה משתתפים: עומר, גל ולסאור. ידוע ששלושתם הצליחו לעבור את המכשול הראשון.

(1) חשב את ההסתברות שבדייק שניים מהם יעלו לשלב חצי הגמר.

(2) חשב את ההסתברות שמבין השלושה, רק עומר וגל יעלו לשלב חצי הגמר.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4. שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה P (ראה סרטוט).

מרכזי המעגלים הם הנקודות M ו- N ,

והרדיוסים שלהם הם R_1 ו- R_2 בהתאמה, $R_2 < R_1$.

מעבירים משיק משותף לשני המעגלים דרך הנקודה P .

מן הנקודה M יוצאים שני ישרים המשיקים למעגל שמרכזו N בנקודות A ו- B .

ישרים אלה חותכים את המשיק המשותף לשני המעגלים

בנקודות C ו- D , כמתואר בסרטוט.

א. הוכח כי $AB \perp MN$.

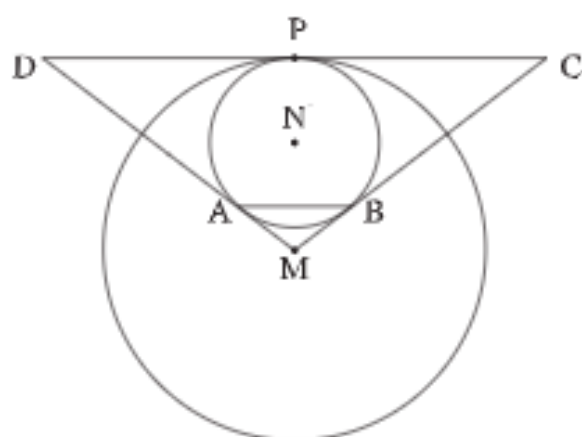
ב. הוכח כי $AB \parallel DC$.

ג. הוכח כי $NB \cdot MC = MN \cdot \frac{DC}{2}$.

נתון: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{7}{3}$, $MN = 8$.

ד. (1) מצא את R_1 ואת R_2 .

(2) מצא את DC .



5. המרובע $ABCD$ הוא מלבן ששתיים מצלעותיו, AD ו- AB ,

משיקות למעגל שרדיוסו R בנקודות E ו- K בהתאמה (ראה סרטוט).

הנקודה C נמצאת על המעגל.

א. הוכח: $\angle KCE = 45^\circ$.

נתון: $\angle KCD = \alpha$, $0^\circ < \alpha < 45^\circ$.

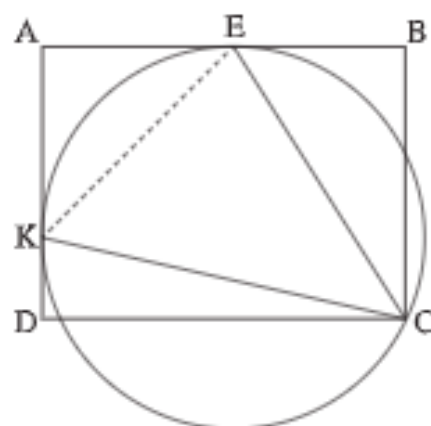
ב. (1) הבע באמצעות α את הזווית של המשולש KCE .

(2) הבע באמצעות R ו- α את האורכים של צלעות המשולש KCE .

ג. הבע באמצעות α את היחס $\frac{EB}{AE}$.

נתון: $\frac{EB}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ד. חשב את α .



פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, $a > 0$ הוא פרמטר.

הבע את תשובותיך באמצעות a , אם יש צורך.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ג. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $(f(x))^2$ שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ד. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $(f(x))^2$, וקבע את סוגן.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$. תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ה. הסתמך על הסעיפים הקודמים וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

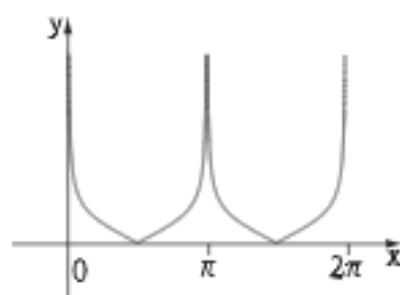
הצב: $a = 2$.

ו. חשב את השטח המוגבל על ידי הגרף של הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 3$ ו- $x = 4$.

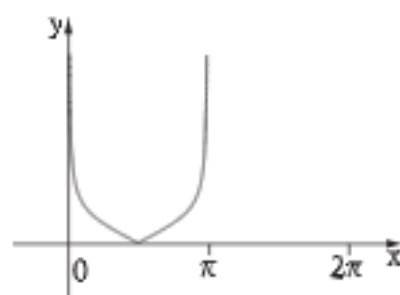
7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} + 3$.

ענה על הסעיפים שלפניך בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

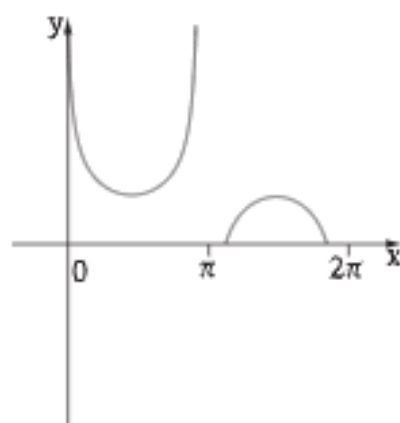
- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
 (3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
 (4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
 ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 נתונות שתי פונקציות: $k(x) = f(x) - 3$, $g(x) = \sqrt{f(x) - 3}$.
 ג. אחד מן הגרפים א-ד שלפניך מתאר את הפונקציה $k(x)$, ואחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $g(x)$.
 קבע איזה מן הגרפים מתאר כל אחת מן הפונקציות, ונמק את קביעותיך.



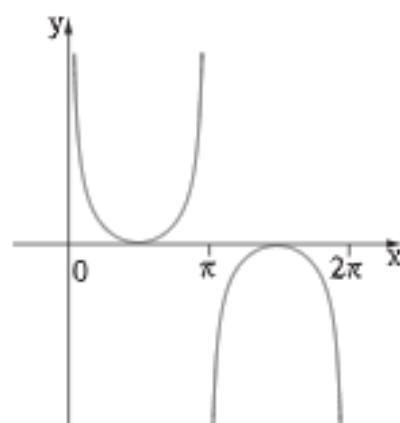
גרף א



גרף ב



גרף ג



גרף ד

8. בסרטוט שלפניך מוצגת הפונקציה $f(x) = \sqrt{a \cdot x^4 + b \cdot x^3}$. נתון שתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $0 \leq x \leq 4$.



- א. (1) הוכח כי $b = -4 \cdot a$.
 (2) לפניך שתי טענות I-II. רק אחת מהן נכונה. קבע מהי הטענה הנכונה, ונמק את קביעתך.
 I. $a > 0, b < 0$
 II. $a < 0, b > 0$
- הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה $(f(x))^2$ המוגדרת גם היא בתחום $0 \leq x \leq 4$. מנקודה P מעבירים ישר המאונך לציר ה- x . M היא נקודת החיתוך של האנך עם ציר ה- x , ו-O היא ראשית הצירים.
- ב. מהו שיעור ה- x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי? נמק את תשובתך.
- ג. בעבור שיעור ה- x שמצאת בסעיף ב, בטא באמצעות a את השטח המקסימלי של המשולש PMO.
- ד. אם ידוע כי שיעור ה- x של הנקודה P נמצא בתחום שבו הפונקציה $(f(x))^2$ אינה יורדת, מהו שיעור ה- x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי? נמק את תשובתך.

בהצלחה!

זכות היוצאים שמורה למחלקת ישראל
 אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך