

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

תוכנית חדשה

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – "שאלות קצרות", סדרות והסתברות

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על ארבע שאלות לבחירתך – $25 \times 4 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיקו את השאלה; סמנו את מספרה בלבד.

(2) התחילו כל שאלה בעמוד חדש. רשמו במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבירו את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

שימו לב: הסבירו את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.

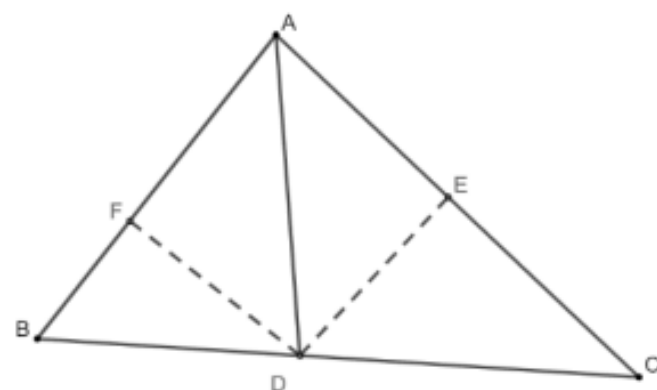
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה - 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברת.

פרק ראשון – "שאלות קצרות", סדרות והסתברות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות במחברת.



- א. נתון משולש ABC . AD הוא חוצה הזווית A .
 הקטעים DE ו- DF מאונכים לצלעות AC ו- AB בהתאמה.
 בעבור מעגל שמרכזו בנקודה D ועובר בנקודה E :
 (1) האם המעגל עובר בנקודה F ? נמק תשובתך.
 (2) האם ייתכן שהמעגל עובר גם בקודקוד המשולש C ? נמק את תשובתך.

- ב. בחוברת לימוד ישנה ומוכתמת נמצא התרגיל הבא:

הוכח כי לכל n טבעי מתקיים השוויון הבא:

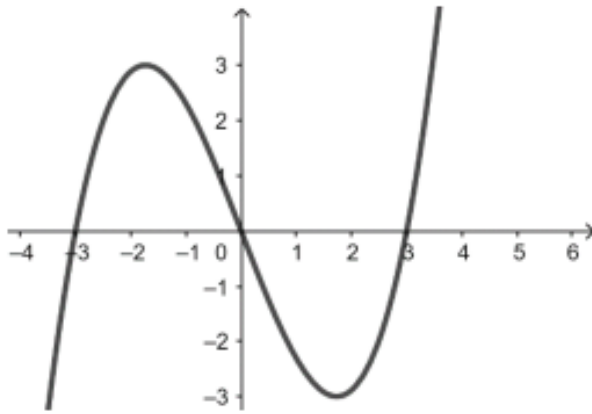
$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + \dots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{(2n-1)3^n + 1}{4}$$

אחד המספרים באגף ימין של התרגיל נמחק.

(1) מצא את המספר שנמחק.

(2) הצב את המספר שמצאת והוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, כי השוויון מתקיים

לכל n טבעי.



ג. לפניך סרטוט של גרף פונקציה אי זוגית $f(x)$.

(1). קבע אם הטענה הבאה נכונה. נמק.

$$\int_{-2}^2 f(x)dx > \int_{-2}^1 f(x)dx$$

(2). מצא a עבורו מתקיים השוויון הבא. נמק.

$$\int_0^4 f(x+a)dx = 0$$

ד. בקופסת ממתקים יש 5 חטיפי שוקולד חלב ו-7 חטיפי שוקולד מריר. אמיר מוציא באקראי חטיף מהקופסה ונותן אותו לחבריו. אמיר חוזר על הפעולה עד שהוא מוציא חטיף שוקולד חלב. מהי ההסתברות שאמיר הוציא 5 חטיפים?

2. נתונה סדרה חשבונית ובה $2n+1$ איברים (n הוא מספר טבעי).

איברי הסדרה הם $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n+1}$ והפרש הסדרה הוא d .

א. הוכח כי ההפרש בין סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ובין סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שווה לאיבר האמצעי בסדרה.

נסמן ב- T את ההפרש בין סכום האיברים ב- n המקומות האחרונים ובין סכום האיברים ב- n המקומות הראשונים.

ב. הבע את T באמצעות d ו- n .

נתון:

– סכום כל איברי הסדרה שווה לסכום האיברים ב- $2n$ המקומות האחרונים.

– סכום האיברים הראשון והאחרון הוא 204.

– $T = 3,468$.

ג. מצא כמה איברים יש בסדרה.

/המשך בעמוד 3/

3. בחממה גדולה של פרחים יש אך ורק פרחים לבנים וסגולים.

ההסתברות לבחור באקראי שני פרחים לבנים גדולה פי 2.25 מן ההסתברות לבחור באקראי שני פרחים סגולים.

א. חשב את אחוז הפרחים הסגולים בחממת הפרחים.

בחממה זו, לכמה מן הפרחים הלבנים, ורק להם, יש עלים גדולים. לשאר הפרחים יש עלים קטנים.

ירדן בחרה באקראי שני פרחים. ההסתברות שירדן בחרה פרח אחד שיש לו עלים קטנים ופרח אחד שיש לו עלים גדולים היא 0.455.

ב. (1) חשב את אחוז הפרחים בחממה שיש להם עלים גדולים.

(2) חשב את ההסתברות שירדן בחרה פרח סגול, אם ידוע שרק לאחד מן הפרחים שהיא בחרה יש עלים גדולים.

ג. מינרת הכינה זר מ" 7 פרחים לבנים בדיוק, שנבחרו באקראי בחממה.

חשב את ההסתברות שיש בזר פרח אחד לפחות שיש לו עלים גדולים ופרח אחד לפחות שיש לו עלים קטנים.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

4. מנקודה A יוצאים שני ישרים, המשיקים למעגל בנקודות B ו-C (ראה סרטוט).

נתון כי $\angle CAB = 90^\circ$.

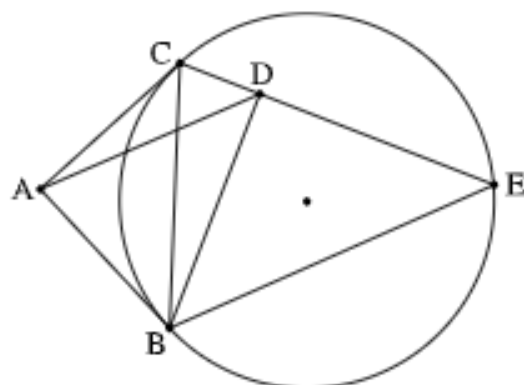
BE ו-CE הם מיתרים במעגל.

המעגל החוסם את המשולש ABC חותך את המיתר CE בנקודה D.

א. הוכח כי $BD = DE$.

ב. הוכח כי $\triangle ADB \sim \triangle CEB$.

ג. הוכח כי $S_{\triangle CEB} = 2 \cdot S_{\triangle ADB}$.



5. משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R.

נתון כי $\angle BAC = 80^\circ$.

נסמן את הזווית AOB ב- α , ואת הצלע AB ב- k .

א. הוכח כי $\cos \alpha = 1 - \frac{k^2}{2R^2}$.

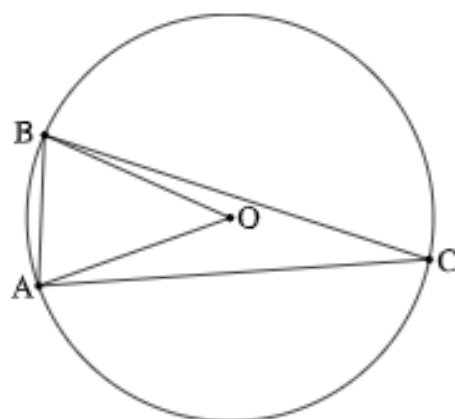
נתון כי $k = \frac{3}{4}R$.

ב. הבע באמצעות R (בלבד) את שטח המשולש ABC.

נסמן ב- r את רדיוס המעגל החסום במשולש AOB.

ג. חשב את היחס $\frac{R}{r}$.

בתשובתך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.



פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{x^2-x}$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 (3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
 (4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: $f(k) = 1$, $t < k$, t הוא פרמטר.

ג. קבע איזה מן הביטויים שלפניך גדול יותר. נמק את קביעתך.

$$\int_t^k f(x) dx \quad \text{או} \quad \int_t^k (f(x))^2 dx$$

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $(f(x))^2$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = -1$ ו- $x = -8$.

7. נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos(mx) + \cos(2x)$, המוגדרת לכל x . m הוא פרמטר השונה מאפס.

נתון כי בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$, שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ הוא -2 .

א. הוכח כי m הוא מספר שלם שמתחלק ב-4 ללא שארית.

הצב $m = 4$ וענה על סעיפים ב-ד שלפניך.

ענה על סעיף ב בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

ב. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ענה על סעיפים ג-ד בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

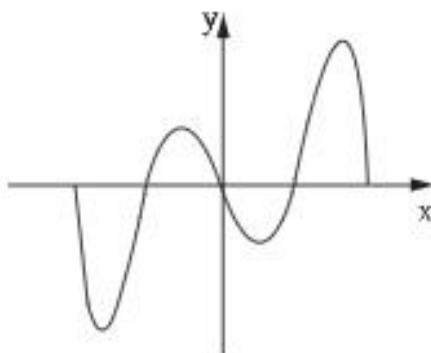
ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$. הסבר את שיקולך.

נתונה פונקציה $k(x)$ המקיימת: $k'(x) = f(x)$, $k(0) = 0$.

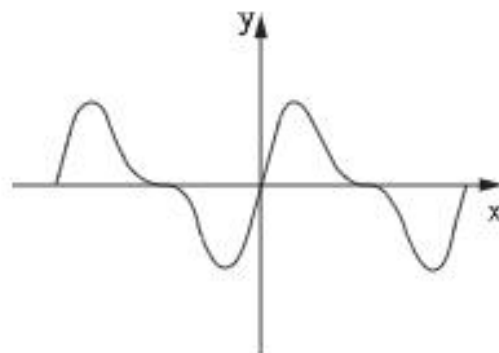
ד. אחד מן הגרפים א-ד שלפניך מתאר את הפונקציה $k(x)$.

היעזר בתשובתך על סעיף ג וקבע איזה מן הגרפים שלפניך מתאים לגרף הפונקציה $k(x)$. נמק את קביעתך.

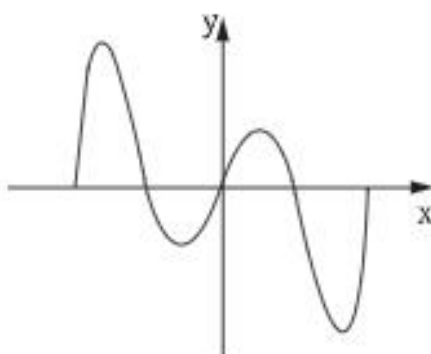
גרף ב



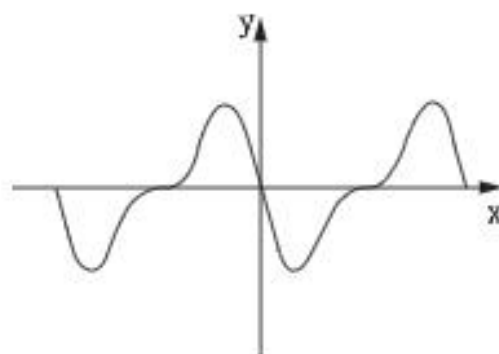
גרף א



גרף ד



גרף ג



8. נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$, $g(x) = \frac{x-3}{x-1}$.

ענה על סעיף א בעבור כל אחת משתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

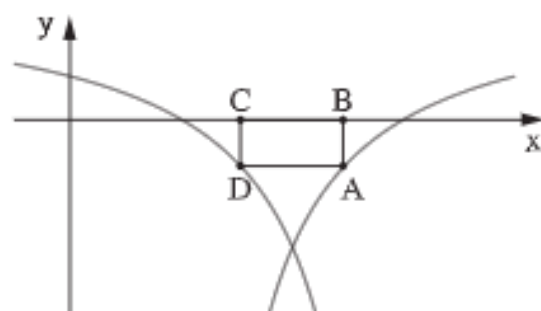
(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

בסרטוט שלפניך מתואר חלק מן הגרף של הפונקציה $f(x)$, חלק מן הגרף של הפונקציה $g(x)$,

ומלבן החסום ביניהם ובין ציר ה- x .

צלע BC של המלבן מונחת על ציר ה- x , והצלע הנגדית, AD , מחברת

בין נקודה על הגרף של $f(x)$ ובין נקודה על הגרף של $g(x)$, כמתואר בסרטוט.



נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A .

ב. קבע מהו תחום הערכים האפשרי של t .

ג. (1) הבע באמצעות t את אורך הצלע AB .

(2) הוכח ששיעור ה- x של הנקודה D הוא $4-t$.

(3) הבע באמצעות t את שטח המלבן $ABCD$.

ד. מצא את t שבעבורו שטח המלבן $ABCD$ הוא מקסימלי.

בהצלחה!

זכות היעצורים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך