

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

תכנית ניסוי

(שאלון ראשון לנבחנים בתכנית ניסוי, 5 יחידות לימוד)

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.
- | | | | | | | |
|-----------|---|----------------------------|---|--------------------------|---|------------------------|
| פרק ראשון | – | אלגברה והסתברות | – | $16\frac{2}{3} \times 2$ | – | $33\frac{1}{3}$ נקודות |
| פרק שני | – | גאומטריה וטריגונומטריה | | | | |
| במישור | | | | | | |
| פרק שלישי | – | חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי | – | $16\frac{2}{3} \times 2$ | – | $33\frac{1}{3}$ נקודות |
| סה"כ | – | | | | | 100 נקודות |
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 - דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 - התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
 - לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים. שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.**

ב ה צ ל ח ה !

ה ש א ל ו ת

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (33 $\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. נהג יצא מעיר A לכיוון עיר B. המרחק בין שתי הערים הוא 120 ק"מ.
בהתחלה נסע הנהג במהירות קבועה כפי שתכנן, אבל כעבור $\frac{3}{4}$ שעה מתחילת נסיעתו הייתה תקלה ברכבו.
הנהג חזר מיד לכיוון A, ונסע 10 ק"מ במהירות של 50 קמ"ש עד למוסד הנמצא בדרך ל-A.

המוסד טיפל בתקלה במשך 33 דקות, ומיד לאחר הטיפול יצא הנהג לכיוון B במהירות הקטנה ב-10 קמ"ש ממהירות נסיעתו עד התקלה.
הוא הגיע ל-B באיחור של שעה אחת לעומת השעה המתוכננת.
מה הייתה מהירות הנסיעה של הנהג עד התקלה?

2. א. הוכח באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:
$$2 \cdot 4 + 5 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4^3 + 11 \cdot 4^4 + \dots + (6n - 1) \cdot 4^{2n} = \frac{(6n - 2) \cdot 4^{2n+1} + 8}{3}$$

ב. הראה כיצד אפשר לחשב על סמך סעיף א את הסכום
 $2 \cdot 4 + 5 \cdot 16 + 8 \cdot 64 + \dots + 26 \cdot 262,144$

3. משפחה יצאה לטיול במכונית הנוסעת על 4 גלגלים חדשים.
בתא המטען של המכונית יש גלגל רזרבי אחד.
ההסתברות שיהיה נקר (פנצ'ר) בגלגל חדש בזמן הטיול היא 0.05 .
ההסתברות שיהיה נקר בגלגל הרזרבי בזמן הטיול היא 0.25 .
- א. מהי ההסתברות שיהיה נקר בדיוק בגלגל אחד מבין ארבעת הגלגלים החדשים?
ב. בתחילת הטיול היה נקר בגלגל אחד, והמשפחה החליפה את הגלגל בגלגל הרזרבי.
- (1) מהי ההסתברות שאחרי ההחלפה יהיה נקר רק בגלגל הרזרבי מבין ארבעת הגלגלים?
(2) מהי ההסתברות שאחרי ההחלפה יהיה נקר רק בגלגל אחד מבין ארבעת הגלגלים?
(3) ידוע כי אחרי ההחלפה היה נקר רק בגלגל אחד מבין ארבעת הגלגלים. מהי ההסתברות שהנקר היה בגלגל הרזרבי?

נוסחאות בהסתברות מותנית

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{פרופורציה מותנית והסתברות מותנית:}$$

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad \text{נוסחת בייס:}$$

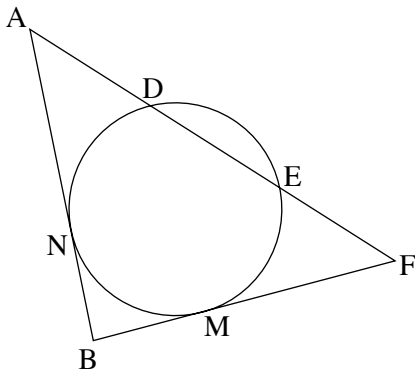
$$P(A/B) \neq P(A/\bar{B}) \quad \text{יש תלות:}$$

$$P(A/B) \neq P(A)$$

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 4-6 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



4. מנקודה A יוצאים למעגל חותך AF

וישר המשיק למעגל בנקודה N.

החותך נפגש עם המעגל בנקודות D ו-E.

מנקודה F יוצא ישר המשיק למעגל בנקודה M,

ונפגש עם המשך המשיק AN בנקודה B

(ראה ציור).

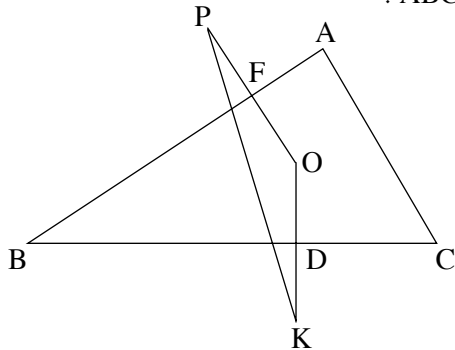
נתון: $AD = DE = EF$.

הוכח:

א. $AN = MF$

ב. $\triangle ADN \cong \triangle FEM$

ג. במרובע MNDE יש שתי צלעות מקבילות זו לזו.



5. הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

המעגל משיק לצלע BC בנקודה D

ולצלע AB בנקודה F.

המשיכו את OD עד K ואת OF עד P

כך ש- $OD = DK$ ו- $OF = FP$.

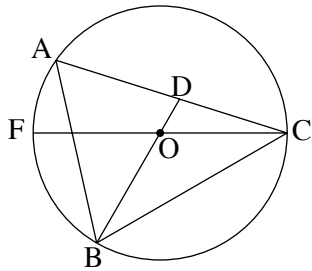
א. הוכח כי $FD \perp BO$.

ב. הוכח כי $BO \perp PK$.

ג. נסמן: רדיוס המעגל החסום הוא r ,

$\angle ABC = 2\beta$, $\angle BAC = 2\alpha$.

הבע באמצעות α , β ו- r את שטח המשולש BOC.



6. משולש חד-זוויות ABC חסום במעגל שמרכזו O.

CF הוא קוטר במעגל, והמשך הרדיוס

BO חותך את הצלע AC בנקודה D,

כמתואר בציור.

נתון: $\angle ABD = \alpha$

הקשת \widehat{BC} ארוכה פי 2 מהקשת \widehat{FB}

א. חשב את גודל הזווית BAC.

ב. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש BAD לשטח המשולש BAC.

ג. נתון גם כי $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$.

מצא את α .

**פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ופונקציות
טריגונומטריות (33 $\frac{1}{3}$ נקודות)**

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה – 16 $\frac{2}{3}$ נקודות).
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 - a}{x^2 + 3a} - 1$

a הוא פרמטר, $a > 0$.

א. מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):

- (1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (2) תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- (3) את שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של הפונקציה. נמק.
- (4) נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
- (5) אסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

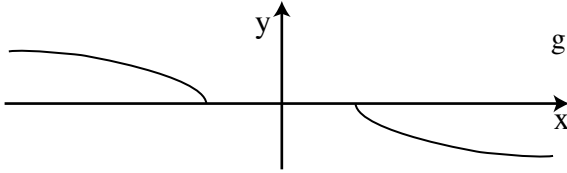
ג. הסבר את השינויים בגרף הפונקציה $f(x)$ עבור $a < 0$

לעומת גרף הפונקציה עבור $a > 0$:

- (1) בתחום ההגדרה של הפונקציה.
- (2) בנקודות הפיתול של הפונקציה.

8. נתונות הפונקציות: $f(x) = \sqrt{-x-4}$

$$g(x) = -\sqrt{x-4}$$



(ראה ציור).

א. מצא את תחום ההגדרה של

כל אחת מהפונקציות הנתונות.

לפונקציות יש משיק משותף, המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = x_0$.

ב. (1) הבע באמצעות x_0 את השיעורים של הנקודה שבה המשיק המשותף משיק

לגרף הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את השיעורים של נקודת ההשקה שהבעת בתת-סעיף ב (1) (ערכים מספריים).

ג. השטח המוגבל על ידי המשיק המשותף, על ידי הגרף של הפונקציה $g(x)$

ועל ידי ציר ה- x , מסתובב סביב ציר ה- x .

מצא את הנפח של גוף הסיבוב שנוצר.

9. נתונה הפונקציה $f(x) = 2 \tan^2 x$ בתחום $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

א. בתחום הנתון:

(1) מצא את ערכי ה- x שעבורם הפונקציה $f(x)$ אינה מוגדרת.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מצא את פונקציית הנגזרת של הפונקציה $g(x) = \tan x - x$.

(2) בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ מצא את השטח המוגבל על ידי הישר $y = \frac{2}{3}$,

על ידי הישר $x = \frac{\pi}{2}$, על ידי הגרף של הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

היעזר בפונקציית הנגזרת של $g(x)$.

בהצלחה!